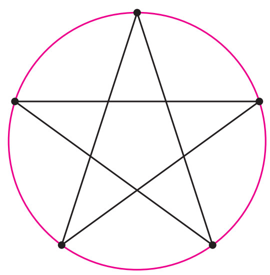
mała delta

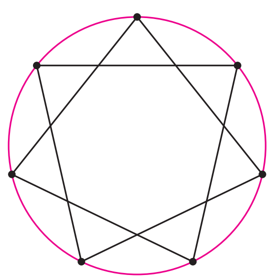
Gwiazdki

Postaramy się obliczyć, ile jest różnych gwiazdek foremnych. *Gwiazdka foremna* to łamana zamknięta wpisana w okrąg, składająca się z odcinków jednakowej długości, spośród których niektóre wzajemnie się przecinają. Nie jest więc gwiazdką foremną trójkąt równoboczny ani kwadrat czy pięciokąt foremny, jest natomiast pentagram (rys. 1). Wyraźnie widać, że nie ma innych foremnych gwiazdek o mniejszej niż 7 liczbie wierzchołków, bo próby narysowania foremnej gwiazdki o sześciu wierzchołkach też nie dają rezultatu. Dla siedmiu wierzchołków pojawiają się dwie gwiazdki foremne (rys. 2). Dla ośmiu wierzchołków znów jest tylko jedna (rys. 3). Pytanie, ile jest gwiazdek foremnych o n wierzchołkach, nie ma – jak widać – oczywistej odpowiedzi.



Rys. 1

Zastanówmy się, jak powstaje foremna gwiazdka. Dobry jest, na przykład, taki przepis. Zaznaczamy na okręgu wierzchołki n-kąta foremnego. Potem łączymy je co drugi, potem co trzeci, potem co czwarty i tak dalej, aż w końcu co $n-2$. W niektórych przypadkach uzyskujemy łamaną, której wierzchołkami są wszystkie wierzchołki n-kąta foremnego, a w innych okazuje się, że łamana zamyka się wcześniej (jak np. w przypadku sześciokąta, czy wtedy, gdy łączymy co czwarty wierzchołek dziesięciokąta foremnego – rysunek 4).



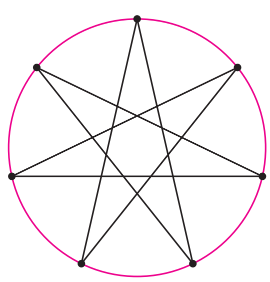
Rys. 2

Kiedy łamana się zamyka wcześniej? Rozważmy łączenie w n-kącie foremnym co k-tego wierzchołka ($1 < k < n-1$) i przypuśćmy, że łamana nie jest n-gwiazdką, czyli ma mniej wierzchołków niż n. Jeśli ta łamana zamyka się po m krokach, to oczywiście $m < n$. Będziemy teraz zliczali łuki, jakie odcinają na okręgu boki łamanej. Ponieważ łuk między kolejnymi wierzchołkami n-kąta foremnego to $\frac{1}{n}$ całego okręgu, więc każdy z boków łamanej odcina łuk stanowiący $\frac{k}{n}$ całego okręgu. Ponieważ łamana zamknęła się po m krokach, więc m takich łuków to pewna wielokrotność całego okręgu. Zatem liczba

$$(*) \qquad m \cdot \frac{k}{n} = \frac{m \cdot k}{n}$$

jest całkowita. Ale zarówno m, jak i k, są mniejsze od n, więc zarówno m, jak i k muszą mieć z n wspólny dzielnik większy od 1.

I to jest klucz do rozwiązania naszego zadania. Gwiazdka o n wierzchołkach powstaje wtedy, gdy k ma z n największy wspólny dzielnik 1. Istotnie, gdy ułamek $\frac{k}{n}$ jest nieskracalny, $(*)$ jest liczbą całkowitą tylko dla m równego co najmniej n.



Rys. 3

Funkcja $\varphi(n)$ wskazująca, ile liczb mniejszych od n ma z liczbą n największy wspólny dzielnik 1, nazywa się funkcją Eulera. To, co uzyskaliśmy poprzednio, można za jej pomocą wyrazić tak:

liczba gwiazdek foremnych o n wierzchołkach to $\dfrac{\varphi(n)}{2} - 1$.

Rzeczywiście, $\varphi(n)$ trzeba podzielić przez 2, bo gwiazdki uzyskane przez łączenie co k-tego i co $(n-k)$-tego wierzchołka są identyczne, tylko rysowane „od innego końca", a 1 należy odjąć, bo łączenie kolejnych wierzchołków ($k=1$ lub $k=n-1$) nie daje gwiazdki, tylko wielokąt foremny.

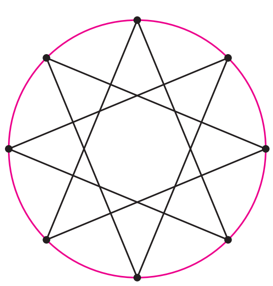
Wartości funkcji $\varphi(n)$ można obliczać ze wzoru

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_k$ to wszystkie dzielniki pierwsze liczby n. Stąd możemy obliczyć, że gwiazdek foremnych o 16 wierzchołkach jest

$$\frac{1}{2}\left(16 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right) - 1 = 3,$$

a gwiazdek o 100 wierzchołkach jest 19.



Rys. 4