Co ma piernik do wiatraka, czyli o σ-ciałach i rozkładzie Poissona

Rafał SZTENCEL

Pod koniec ubiegłego stulecia zacząłem wykładać rachunek prawdopodobieństwa na Wydziale Nauk Ekonomicznych UW. Gdy sesja była tuż-tuż, na konsultacje zgłosiły się dwie bardzo pilne studentki, które rozwiązały wszystkie zadania z odpowiednich rozdziałów podręcznika [2], oprócz jednego:

Ile jest wszystkich możliwych σ-ciał, jeśli Ω ma n elementów?

Doszliśmy do tego pytania po trzech godzinach intensywnej pracy nad zadaniami kombinatorycznymi (studentki wykryły kilka błędów w książce). Warto wspomnieć, że konsultacje odbywały się na korytarzu, przy akompaniamencie młotów pneumatycznych, bowiem budynek Wydziału Matematyki był (i nadal jest) w remoncie.

W tych warunkach może zbyt szybko zgodziłem się na wzór rekurencyjny (zdaje się, że błędny), jaki zaproponowały studentki, i starałem się zasugerować, że znajomość jawnego wzoru nie będzie bezwzględnie wymagana na egzaminie, a i przyszły pracodawca może pogodzi się z niewiedzą w tym zakresie. Ponieważ panie wyglądały na rozczarowane, następnego dnia po wykładzie powiedziałem im, czego ode mnie wymagały. I wtedy rozczarowanie przeszło w zdumienie.

Jak wiadomo, σ-ciało jest niepustą rodziną podzbiorów zbioru Ω, zamkniętą ze względu na przeliczalne działania na zbiorach. Jeśli Ω jest skończona, to istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między podziałami zbioru Ω a σ-ciałami. Istotnie, rozpatrzmy σ-ciało $\mathcal{F}$. Dla $\omega \in \Omega$ definiujemy

$$A_\omega = \bigcap_{\omega\in B, B\in\mathcal{F}} B,$$

czyli przecięcie wszystkich elementów $\mathcal{F}$, do których należy ω. Można wykazać, że zbiory A_ω są albo równe, albo rozłączne, i stanowią podział zbioru Ω. Nazywa się je czasem atomami σ-ciała. Odwrotnie, mając podział zbioru Ω, bez trudu otrzymamy σ-ciało, składając jego elementy z atomów. Na przykład: podziałowi zbioru $\{1, 2, 3\}$ na zbiory $\{1\}$, $\{2, 3\}$ odpowiada σ-ciało $\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Liczbę podziałów zbioru n-elementowego nazywamy n-tą liczbą Bella. Liczby Bella b_n wiąże zależność rekurencyjna:

$$(1) \qquad b_{n+1} = \binom{n}{0} b_n + \binom{n}{1} b_{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} b_0,$$

jeśli bowiem wyróżnimy pewien element zbioru $(n + 1)$-elementowego, to w celu umieszczenia go w pewnym atomie musimy mu dodać do towarzystwa jeszcze k elementów ($0 \leqslant k \leqslant n$), wybranych na $\binom{n}{k}$ sposobów. Pozostały zbiór $(n - k)$-elementowy dzielimy na b_{n-k} sposobów.

Niech $P(z)$ będzie wykładniczą funkcją tworzącą (patrz np. [1]) ciągu (b_n):

$$(2) \qquad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n z^n}{n!}.$$

Wtedy

$$(3) \qquad P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1} z^n}{n!}.$$

Stąd $P'(z) = e^z P(z)$, co widać, gdy porównamy współczynniki przy z^n szeregu (3) oraz iloczynu Cauchy'ego szeregu (2) przez szereg przedstawiający funkcję wykładniczą:

$$\frac{b_{n+1}}{n!} = \frac{1}{0!} \cdot \frac{b_n}{n!} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{b_{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{b_0}{0!}.$$

Ta zależność jest równoważna z (1).

Jeśli $[P'(z)/P(z)] = e^z$, to $[\ln P(z)]' = e^z$, zatem $P(z) = e^{e^z + c}$, a skoro $P(0) = b_0 = 1$, to

$$P(z) = e^{e^z - 1}$$

Jest to funkcja tworząca momenty rozkładu Poissona z parametrem 1!

Dokładniej, jeśli zmienna losowa X ma taki rozkład, to

$$P(z) = Ee^{zX} = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n X^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n EX^n}{n!}.$$

Zamiana kolejności sumowania i brania wartości oczekiwanej da się uzasadnić. Porównując współczynniki przy z^n, otrzymujemy wreszcie jawny wzór na liczby Bella:

$$(4) \qquad b_n = EX^n = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Na przykład: $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 5$, $b_4 = 15$, $b_5 = 52$. Dziwne, że w celu otrzymania liczb całkowitych musimy używać szeregów nieskończonych. Jeszcze dziwniejszy jest związek między liczbami Bella a momentami rozkładu Poissona. Powinien przecież istnieć jakiś sprytny dowód wzoru (4) niewymagający manipulacji funkcjami tworzącymi i umożliwiający jego głębsze zrozumienie.

Może dziwne było zachowanie moich studentek. Ale w roku 2007 tak pilnych studentek (ani studentów) już chyba nie ma.

Bardzo dziękuję za to zdanie :([modelowa Czytelniczka, A.S.]

Literatura

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1996.

[2] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Wyd. I, Script, Warszawa 2000.