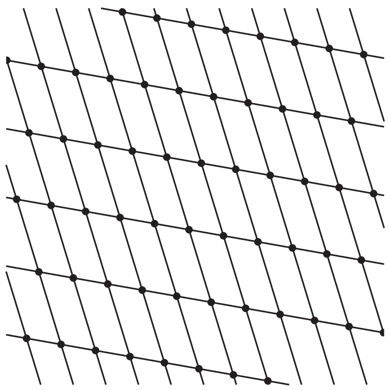
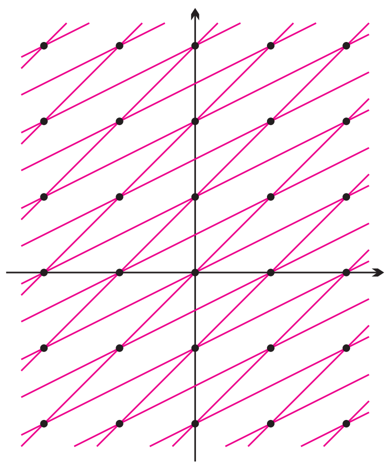
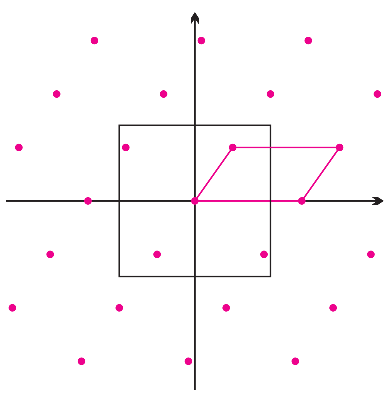
O pożytkach z siatki



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3. Współrzędne wierzchołków kolorowego równoległoboku to $(0,0)$, $\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$, $\left(\frac{\alpha+1}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ $\left(\frac{1}{\varepsilon}, 0\right)$.

Jednakowymi równoległobokami łatwo pokryć płaszczyznę (rys. 1). Pokrycie takie nazywamy *siatką*, a wszystkie wierzchołki równoległoboków nazywamy jej *wierzchołkami*. Jeśli pole równoległoboku jest równe 1, to wyznaczoną przez niego siatkę nazywamy *jednostkową*. W układzie współrzędnych najbardziej rzuca się w oczy siatka jednostkowa złożona z kwadratów, których wierzchołkami są wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych. Mniej oczywiste, ale mimo to prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie o siatkach jednostkowych. *Wszystkie wierzchołki dowolnej siatki jednostkowej, której jednym z wierzchołków jest początek układu współrzędnych, mają współrzędne*

$$(a\cdot m + b\cdot n,\ c\cdot m + d\cdot n),$$

gdzie a, b, c i d są dowolnie ustalonymi liczbami spełniającymi warunek

$$(*)\qquad |a\cdot d - b\cdot c| = 1,$$

liczby zaś m i n przebiegają wszystkie liczby całkowite.

Oczywiście, „zwykłą” siatkę jednostkową otrzymamy dla $a=d=1$ i $b=c=0$. Na rysunku 2 widzimy też siatkę otrzymaną dla $a=b=d=1$ i $c=2$ (rzeczywiście $|1\cdot 1 - 1\cdot 2| = 1$). Liczby a, b, c, d nie muszą jednak być całkowite ani nawet wymierne – byle tylko spełniały warunek $(*)$. To spostrzeżenie pozwala na wykorzystanie siatek do stwierdzenia, jak dalece można liczbę niewymierną przybliżyć przez liczbę wymierną – za chwilę to sprecyzujemy.

Potrzebne do tego jest jeszcze jedno twierdzenie.

Twierdzenie Minkowskiego o kwadracie. *Kwadrat o boku 2, mający środek w wierzchołku dowolnie obranej siatki jednostkowej, ma w swoim wnętrzu lub na brzegu jeszcze co najmniej jeden wierzchołek tej siatki.*

Twierdzenie to wydaje się oczywiste, ale – o dziwo – o ile dowód poprzedniego twierdzenia jest dość banalny (proszę spróbować – trzeba zwyczajnie obliczyć pole równoległoboku), o tyle dowód twierdzenia Minkowskiego, ze względu na dowolność siatki, nie jest całkiem prosty. Ale my oba twierdzenia przyjmiemy bez dowodu (dowód ogólniejszej wersji drugiego twierdzenia znajduje się na stronie obok).

Weźmy teraz jakąś liczbę niewymierną α. Ponadto obierzmy sobie jakąś (naprawdę dowolną!) dodatnią liczbę ε i zbudujmy siatkę jednostkową (rys. 3) dla

$$a=\frac{-1}{\varepsilon},\qquad b=\frac{\alpha}{\varepsilon},\qquad c=0,\qquad d=\varepsilon.$$

Istotnie, siatka jest jednostkowa, bo $ad-bc=ad=-1$. Zgodnie z twierdzeniem Minkowskiego, wewnątrz lub na brzegu kwadratu o wierzchołkach $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ znajduje się jakiś punkt z naszej siatki – oznaczmy odpowiadające mu liczby całkowite przez m_0 i n_0. Obie jego współrzędne muszą mieścić się w przedziale $\langle -1; 1\rangle$. Mamy zatem

$$\left|\frac{-m_0}{\varepsilon} + \frac{\alpha\cdot n_0}{\varepsilon}\right| \leqslant 1 \quad \text{i} \quad |\varepsilon\cdot n_0| \leqslant 1,$$

czyli (ε jest dodatnie!)

$$(**)\qquad |\alpha\cdot n_0 - m_0| \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{|n_0|},$$

skąd (dzieląc przez n_0) otrzymujemy

$$\left|\alpha - \frac{m_0}{n_0}\right| \leqslant \frac{1}{n_0^2}.$$

Okazało się zatem, że dla dowolnej liczby niewymiernej α istnieje taka liczba wymierna $\frac{m_0}{n_0}$, która przybliża tę liczbę niewymierną z dokładnością co najmniej taką, jak odwrotność kwadratu swojego mianownika.

Warto zwrócić uwagę na rolę dowolnie obieranego ε. Jeśli będzie ono coraz mniejsze, to – wobec $(**)$ – otrzymywane przybliżenia wymierne będą coraz bliższe α.

Małą Deltę przygotowali Michał ADAMASZEK i Marek KORDOS