Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2008

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
537 ($WT = 2{,}42$) i **538** ($WT = 1{,}50$)
z numeru 3/2007

Tomasz Wietecha	– Tarnów	47,09
Andrzej Daniluk	– Warszawa	42,70
Dariusz Kurpiel	– Posada Zarszyn	42,51
Witold Bednarek	– Łódź	38,60
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	38,05
Grzegorz Karpowicz	– Wrocław	37,78

I znów moment godny odnotowania: Tomasz Wietecha zgromadził 44 punkty już po raz siódmy!

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 549, 550

Redaguje Marcin E. KUCZMA

549. Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $|AB| > |BC| > |CA|$. Odcinek CK jest jego wysokością; punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i AC. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, że środek okręgu wpisanego w trójkąt KMN leży na prostej PQ.

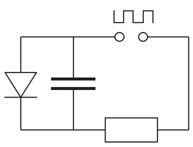
550. Dla każdej liczby rzeczywistej a wyznaczyć kres dolny zbioru tych liczb rzeczywistych x, które spełniają nierówność $\lfloor x\rfloor \cdot \{x\} \geqslant a$. (Symbol $\{x\}$ oznacza tu liczbę $x - \lfloor x\rfloor$).

Zadanie 550 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Zadania z fizyki nr 446, 447

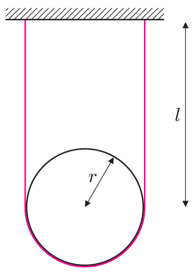
Redaguje Jerzy B. BROJAN

446. Do źródła napięcia o przebiegu prostokątnym (tzn. $U = +U_0$ w ciągu czasu T, następnie $U = -U_0$ w takim samym przedziale czasu) przyłączono obwód składający się z opornika o oporze R, kondensatora o pojemności C oraz diody doskonale przewodzącej w kierunku przewodzenia i całkowicie nieprzewodzącej w kierunku zaporowym (schemat obwodu – rys. 1). Jak długo płynie prąd przez diodę w ciągu jednego okresu zmian napięcia?



Rys. 1

447. Jednorodny walec o promieniu r wisi na dwóch pętlach lekkiej i nierozciągliwej nitki (zob. rys. 2), a odległość osi walca od poziomu zawieszenia jest równa l. Odległość końców każdej z nitek jest równa $2r$. Obliczyć częstotliwość małych drgań takiego wahadła – oś walca pozostaje równoległa do jej kierunku w położeniu równowagi.



Rys. 2

Można też inaczej

W artykule *Równanie Pitagorasa w kongruencjach* w poprzednim numerze *Delty* autorzy dowodzą, że równanie Pitagorasa

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ma dokładnie p^2 rozwiązań w ciele $\mathbb{Z}_p$. Oto elementarny dowód: najpierw zauważmy, że równanie Pitagorasa, które można równoważnie zapisać w postaci:

$$(1) \qquad x^2 = (z-y)(z+y)$$

ma nad ciałem charakterystyki różnej od 2 tyle samo rozwiązań, co równanie:

$$(2) \qquad a^2 = bc.$$

Istotnie, jeśli (x, y, z) jest rozwiązaniem równania (1), to $(a, b, c) := (x, z-y, z+y)$ jest rozwiązaniem równania (2) i odwrotnie: rozwiązanie (a, b, c) równania (2) daje rozwiązanie $(x, y, z) := (a, \frac{c-b}{2}, \frac{c+b}{2})$ równania (1). Te przekształcenia pomiędzy trójkami (x, y, z) rozwiązań pierwszego równania i trójkami (a, b, c) rozwiązań drugiego równania są wzajemnie odwrotne i zadają bijekcję zbiorów rozwiązań.

Rozwiązania równania (2) w $\mathbb{Z}_p$ łatwo zliczyć. Każda para (a, b), gdzie $b \neq 0$ wyznacza jedyną wartość $c = a^2 b^{-1}$, przy której równanie jest spełnione. Takich par (a, b) jest $p(p-1)$. Ponadto mamy rozwiązania postaci $(0, 0, c)$ dla dowolnego c. Łącznie rozwiązań jest więc $p(p-1) + p = p^2$. To samo rozumowanie pokazuje, że w ciele $\mathbb{F}_{p^m}$ (dla $p \neq 2$) rozwiązań równania Pitagorasa jest $p^m(p^m - 1) + p^m = p^{2m}$.

Michał ADAMASZEK