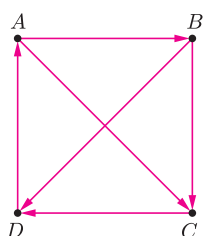




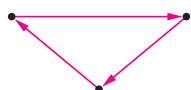
mała delta

Ilu liderów?

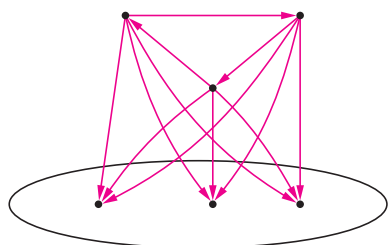
W siatkarskich rozgrywkach ligowych lub w innym turnieju, w którym każdy gra z każdym, startuje n drużyn. W siatkówce, co ważne, nie ma remisów. Zwykle nie ma zespołu, który rozgromiłby wszystkie inne, stąd łagodniejsza definicja.



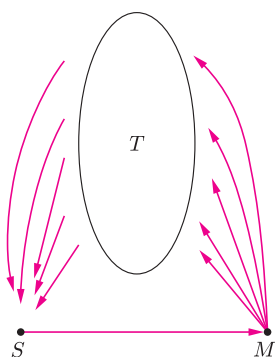
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Definicja. Drużynę A nazwiemy *liderem*, jeśli każdą inną drużynę B pokonała ona bądź w bezpośrednim pojedynku, bądź istnieje taka drużyna C , że A wygrała z C , a C z B .

Wyniki rozgrywek obrazuje pełny graf skierowany (rys. 1), w którym wierzchołkom przypisujemy drużyny, a krawędzie opisują wyniki meczów (strzałka prowadzi od zwycięzcy do pokonanego). Taki graf nazywamy fachowo właśnie *turniejem*. W turnieju z rysunku 1 drużyna A jest liderem, bo pokonała bezpośrednio B i C , pośrednio zaś D . Liderami są też drużyny B i D , a nie jest nim zespół C .

Ilu maksymalnie może być liderów w turnieju z n drużynami? Trzy drużyny mogą wygrywać ze sobą „w kółku” (rys. 2), a idąc dalej tym tropem, dla każdego $n \geq 3$ można skonstruować turniej, w którym liderów będzie trzech (rys. 3). Czy to już maksimum? Otóż nie.

Fakt. Jeśli $n \neq 2$ i $n \neq 4$, to istnieje taki n -drużynowy turniej, w którym wszystkie (!) zespoły są liderami.

Oto dowód. Do n -drużynowego turnieju T , w którym wszyscy są liderami, dołączmy dwie nowe drużyny, Mistrzów i Słabeuszy (rys. 4). Wyniki spotkań ustawiamy (byle tylko nie było z tego jakiejś afery) następująco: Mistrzowie pokonują wszystkie drużyny z turnieju T , Słabeusze zaś z nimi wszystkimi przegrywają. W pojedynku Mistrzów ze Słabeuszami wygrywają... Słabeusze (to podejrzane). Łatwo zobaczyć, że w nowym turnieju każda z drużyn jest liderem.

Dowód faktu zakończy wskazanie turnieju z trzema (rys. 2) i sześcioma (zadanie domowe) drużynami, w którym każdy zespół jest liderem. Obrazek będzie pełniejszy, jeśli Czytelnik udowodni ponadto, że dla $n = 2$ lub $n = 4$ nie ma takich turniejów (wymaga to w każdym z tych przypadków $n - 2$ minut zastanowienia).

Choć wszyscy są liderami, to wyniki naszego turnieju nie są wcale wyrównane: Szczyt tabeli ligowej okupują Mistrzowie, z $n - 2$ wygranymi w $n - 1$ meczach, a w ogonie ciągnie się drużyna Słabeuszy, z tylko jedną wygraną. Czytelnik zechce skonstruować taki n -drużynowy turniej, w którym każda drużyna będzie liderem, a do tego tabela wyników będzie możliwie wyrównana (dla nieparzystego n może być nawet całkiem płaska – wszyscy z tą samą liczbą punktów).