Euler, Lagrange i trzy ciała

Mikołaj KORZYŃSKI[*]

W *Delcie* 10/2007 Tomasz Kwast napisał o problemie trzech ciał, a właściwie jego szczególnej wersji: o tzw. zredukowanym problemie trzech ciał. Rozwiązania, które opisał, można stosunkowo łatwo uogólnić i to na dwa sposoby: rezygnując z założenia o znikomej masie trzeciego ciała i dopuszczając szerszą klasę orbit niż kołowe. Ze względu na ich urodę postaram się te uogólnione rozwiązania opisać w tym artykule. Najpierw jednak trochę historii.

Problem trzech ciał jest dla mechaniki tym, czym wielkie twierdzenie Fermata dla algebry i teorii liczb: postawionym dawno, pozornie prostym zagadnieniem, którego badanie przez niemal dwieście lat wpływało na rozwój nowych technik matematycznych, i za które brali się najwybitniejsi: Poincaré, Jacobi, Weierstrass, a wcześniej wspomniani w tytule Euler i Lagrange. Oczywiście, pełnego rozwiązania problemu nie ma i nie będzie, gdyż ruch jest w ogólności chaotyczny. Dwaj najwięksi mechanicy XVIII wieku znaleźli jednak pierwsze, ścisłe rozwiązania szczególne.

Za nimi założymy, że ruch wszystkich ciał odbywa się w jednej płaszczyźnie. Zapytamy, czy jest możliwe, aby ruch był wyjątkowo prosty: aby ciała tworzyły cały czas pewną figurę geometryczną, poddawaną zmiennym w czasie obrotom i jednokładnościom. Pojedynczo każde ciało wykonywać będzie ruch wokół środka masy, przy czym przyspieszenie skierowane będzie w kierunku tego środka.

Oznaczmy wektory położeń trzech ciał przez $\vec{x}_i$, ich masy przez m_i, a $r_{jk} = |\vec{x}_j - \vec{x}_k|$ niech oznacza odległość j-tego ciała od k-tego. Równania ruchu mają postać

$$\ddot{\vec{x}}_1 = \frac{\mathrm{G}m_2}{r_{12}^3}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + \frac{\mathrm{G}m_3}{r_{13}^3}(\vec{x}_3 - \vec{x}_1),$$

$$\ddot{\vec{x}}_2 = \frac{\mathrm{G}m_1}{r_{12}^3}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + \frac{\mathrm{G}m_3}{r_{23}^3}(\vec{x}_3 - \vec{x}_2),$$

$$\ddot{\vec{x}}_3 = \frac{\mathrm{G}m_1}{r_{13}^3}(\vec{x}_1 - \vec{x}_3) + \frac{\mathrm{G}m_2}{r_{23}^3}(\vec{x}_2 - \vec{x}_3).$$

Zgodnie z zasadą zachowania pędu w pewnym układzie inercjalnym środek masy trzech mas spoczywa. Wybierzmy ten układ i dla uproszczenia przyjmijmy, że środek masy pokrywa się ze środkiem układu współrzędnych, czyli

(1) $$m_1\,\vec{x}_1 + m_2\,\vec{x}_2 + m_3\,\vec{x}_3 = 0.$$

Aby trzy masy w dowolnych dwóch momentach tworzyły figury podobne (np. trójkąty) o ustalonym środku masy, potrzebne jest, aby ich prędkości i przyspieszenia również były tak samo przekształcone. W szczególności oznacza to, że wektory ich przyspieszenia są proporcjonalne do położeń z tym samym współczynnikiem proporcjonalności dla wszystkich ciał, czyli

(2) $$\ddot{\vec{x}}_k = -a\,\vec{x}_k$$

dla pewnej stałej a. Porównanie tej zależności z równaniami ruchu daje

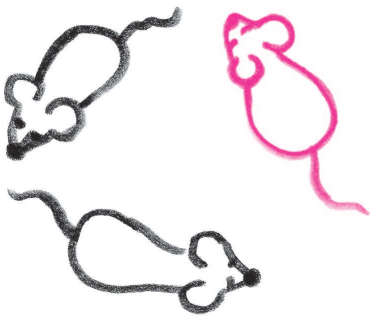
$$\frac{\mathrm{G}m_2}{r_{12}^3}\,\vec{x}_2 + \frac{\mathrm{G}m_3}{r_{13}^3}\,\vec{x}_3 = \left(-a + \frac{\mathrm{G}m_2}{r_{12}^3} + \frac{\mathrm{G}m_3}{r_{13}^3}\right)\vec{x}_1$$

$$m_2\,\vec{x}_2 + m_3\,\vec{x}_3 = -m_1\,\vec{x}_1$$

i podobnie dla pozostałych par ciał. Dla porównania dopisaliśmy na dole przekształcone równanie środka masy (1).

Rozważmy dwa przypadki. Jeśli wszystkie odległości są równe ($r_{12} = r_{23} = r_{13}$), to pierwsze z tych równań wynika prosto z drugiego przez pomnożenie stronami przez stałą. Drugie równanie jest zawsze prawdziwe – środek masy wszak się nie przesuwa – więc i pierwsze jest spełnione tożsamościowo. Postawione warunki spełnia więc konfiguracja z masami umieszczonymi w wierzchołkach trójkąta równobocznego.

Rozwiązanie zadania M 1188.
Ustalmy liczbę całkowitą dodatnią k oraz rozpatrzmy zbiory $A_1 = \{1, k+1\}$, $A_2 = \{2, k+2\}$, …, $A_k = \{k, 2k\}$. Liczby $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k+1}$ są dodatnie, jest ich $k+1$ oraz żadna z nich nie przekracza $2k$. Wobec tego, na mocy zasady szufladkowej, pewne dwie liczby $x_i < x_j$ znajdują się w tym samym zbiorze A_l. To oznacza, że $x_j - x_i = k$, co kończy dowód.



[*]Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski