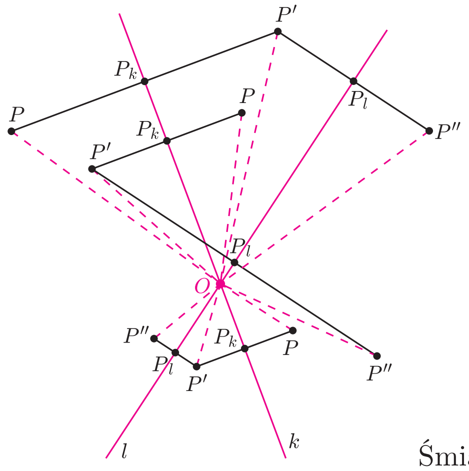
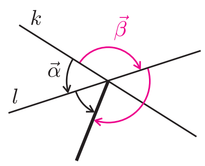
W dowolnie małym kącie wierzchołkowym są *wszystkie* proste przechodzące przez jego wierzchołek



Rys. 1

Jeśli na płaszczyźnie wykonamy symetrię względem dwóch przecinających się prostych, okaże się, że wykonaliśmy obrót wokół punktu ich przecięcia o podwojony kąt między tymi prostymi. Dowód tego faktu jest prosty. Dowolny punkt P – jeden z tak nazwanych punktów na rysunku 1 – po symetrii względem prostej k znajdzie się w punkcie P', który z kolei po symetrii względem prostej l znajdzie się w punkcie P''. Oznaczamy przez P_k środek odcinka PP', a przez P_l środek odcinka $P'P''$. Wówczas możemy zauważyć, że dla każdego z punktów P mamy

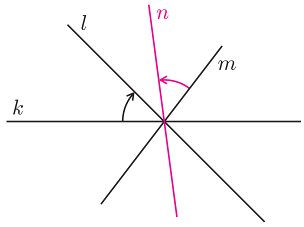
$$\sphericalangle\overrightarrow{POP''} = \sphericalangle\overrightarrow{POP_k} + \sphericalangle\overrightarrow{P_kOP'} + \sphericalangle\overrightarrow{P'OP_l} + \sphericalangle\overrightarrow{P_lOP''} =$$
$$= 2\sphericalangle\overrightarrow{P_kOP'} + 2\sphericalangle\overrightarrow{P'OP_l} = 2\sphericalangle\overrightarrow{P_kOP_l} = 2\sphericalangle\overrightarrow{kl}.$$



Rys. 2

Śmiało napisaliśmy, że chodzi o $2\sphericalangle\overrightarrow{kl}$, ale (rys. 2) dwa razy który, $\vec{\alpha}$ czy $\vec{\beta}$? Czytelnik Przytomny z pewnością sprawdzi, że to wszystko jedno – przypominamy, że chodzi o kąty zorientowane.

To spostrzeżenie pozwala z łatwością udowodnić to, co Niemcy nazywają twierdzeniem Schmidta: *złożenie trzech symetrii względem prostych przechodzących przez jeden punkt to symetria względem jednej prostej też przez ten punkt przechodzącej.* Faktycznie, dla symetrii kolejno względem prostych k, l, m zastępująca je symetria to symetria względem takiej prostej n, że (rys. 3)



Rys. 3

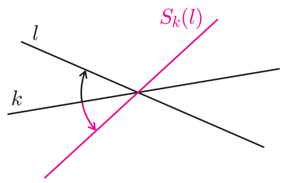
$$(\star)\qquad \sphericalangle\overrightarrow{kl} = -\sphericalangle\overrightarrow{mn},$$

prawda? Czytelnikowi Wątpiącemu zwrócimy uwagę, że wykonanie kolejno wszystkich czterech symetrii to obrót o kąt

$$\sphericalangle\overrightarrow{kl} + \sphericalangle\overrightarrow{mn} = 0,$$

mamy więc (S_a to symetria względem prostej a, natomiast Id to identyczność)

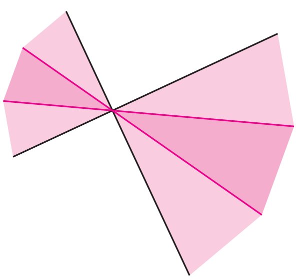
$$\mathrm{Id} = S_nS_mS_lS_k, \quad \text{zatem} \quad S_mS_lS_k = S_nS_nS_mS_lS_k = S_n\mathrm{Id} = S_n.$$



Rys. 4

W szczególności, gdy zastąpimy symetrie kolejno względem prostych k, l, k jedną symetrią, to jej oś będzie (rys. 4) obrazem symetrycznym prostej l względem prostej k – proszę sprawdzić ze wzorem ($\star$).

I tak dojechaliśmy do tytułowego stwierdzenia. Jeśli będziemy składali symetrie względem prostych należących do danego kąta wierzchołkowego, to uzyskamy symetrie względem wszystkich prostych kąta trzy razy większego – wystarczy stosować ostatnio poczynione spostrzeżenie. A powtarzając tę operację wiele razy, przez to potrajanie uzyskamy symetrie względem wszystkich prostych przechodzących przez wierzchołek tego kąta.



Rys. 5

No dobrze, to są symetrie, ale gdzie te proste? Szanowni Czytelnicy, czyż można wątpić w istnienie prostej, gdy umiemy wykonać symetrię względem niej?