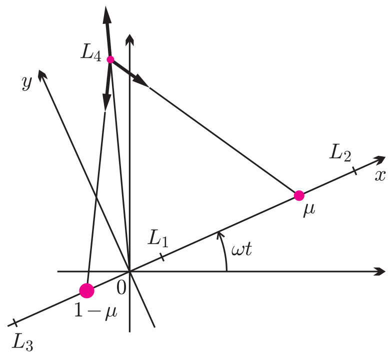
Punkty Lagrange'a

Tomasz KWAST

Równania ruchu punktu materialnego pod wpływem grawitacji ze strony drugiego punktu materialnego są rozwiązalne, co oznacza, że potrafimy napisać formuły określające położenie i prędkość każdego z nich w dowolnej chwili. Nie da się tego zrobić już w przypadku trzech punktów i to nie dlatego, że jeszcze nikt tych formuł nie zdołał wyprowadzić. Jest znacznie gorzej: dowiedziono, że takich ogólnych formuł nie ma i nie będzie. Nie przeszkadza to w śledzeniu ruchu trzech ciał pod wpływem wzajemnej grawitacji – numerycznie. A pewne własności tego ruchu dają się jednak opisać formułami – mówimy: „analitycznie". O tym niżej.

Tak zwane ograniczone zagadnienie trzech ciał polega na badaniu ruchu ciała o bardzo małej masie (tzw. znikomego) w polu ciężkości dwóch ciał o masach skończonych (ciał „ciężkich") obiegających się po kołach. Mimo niezachęcającej nazwy (ograniczone) ma ono zastosowanie w bardzo wielu przypadkach w mechanice nieba i w astrofizyce. Jest to przecież model ruchu statku kosmicznego lecącego z Ziemi na Księżyc, ruchu planetoidy czy komety w polu ciężkości Słońca i Jowisza, ruchu atomu gazu przelatującego z jednego składnika gwiazdy podwójnej do drugiego. We wszystkich tych sytuacjach istotne jest, że ciało znikome wyczuwa obecność obu ciał ciężkich, ale nie wpływa na ich ruch, czyli one nie wyczuwają jego obecności.

Skoro dwa ciała ciężkie mają się obiegać po kołach, to oznacza, że ruch ten odbywa się ze stałą prędkością kątową ω, a ciała te dzieli niezmienna odległość R. Wtedy na mocy praw Keplera zachodzi $\omega^2 = \mathrm{G}M/R^3$, gdzie M oznacza sumę mas tych ciał, a G, jak zwykle, stałą grawitacji. Nic nie stoi na przeszkodzie, by sumę mas, odległość ciał skończonych i prędkość kątową uznać za jednostki (masy, odległości i odwrotności czasu). Masa ciała cięższego niech będzie równa $1-\mu$, a lżejszego μ. Stała grawitacji wtedy też przyjmie wartość równą 1 i wszystkie równania w nowych zmiennych staną się prostsze graficznie, nie tracąc nic z treści. Uczeni stwierdzili, że ruch ciała znikomego wygodnie jest śledzić w układzie współrzędnych obracającym się (a więc nieinercjalnym!) jednostajnie z prędkością ω wokół środka masy (oczywiście dwóch ciał skończonych, skoro trzecie jest znikome) – rysunek. Bez wdawania się w formalne przeróbki równań przewidujemy, że w takim układzie ruch ciała znikomego będzie się odbywać pod wpływem grawitacji (przyspieszeń) ze strony obu mas ciężkich oraz przyspieszenia odśrodkowego.



Ale mniejsza o ruch. Zapytajmy chytrze, czy jest możliwy bezruch ciała znikomego względem układu obracającego się. Warunkiem tego musi być zerowanie się sumy wektorów trzech wspomnianych przyspieszeń. Mamy więc problem, czy istnieją w obracającym się układzie punkty, w których raz umieszczone ciało znikome (czyli z zerową prędkością) mogłoby przebywać stale? Na pytanie to można odpowiedzieć albo uczenie, albo zgadując. Uczenie oznaczałoby zbudowanie potencjału tych trzech przyspieszeń, obliczenie jego trzech pochodnych cząstkowych względem współrzędnych (gradientu), przyrównanie ich do zera i znalezienie takich x, y, z, które spełniałyby te trzy algebraiczne równania. Zgadywanie natomiast warto zacząć od spostrzeżenia, że jeżeli takie punkty istnieją, to – po pierwsze – muszą leżeć w płaszczyźnie obiegania się mas ciężkich. Po drugie, że na osi x, na której leżą ciała ciężkie, w każdym punkcie przyspieszenia te działają wzdłuż tej osi, co znacznie zgadywanie ułatwia. Zauważamy więc, że np. w punkcie x leżącym niedaleko osi obrotu między masami ciężkimi działa przyspieszenie grawitacyjne skierowane

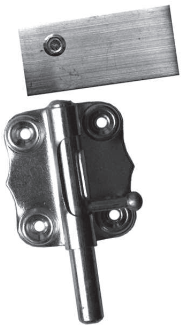
Rozwiązanie zadania M 1185.
Niech a_i oznacza iloczyn liczb stojących w i-tym wierszu, natomiast niech b_j będzie iloczynem liczb stojących w j-tej kolumnie. Przyjmijmy ponadto, że dokładnie n spośród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ jest równych -1. Wtedy iloczyn wszystkich liczb z tablicy wynosi $(-1)^n$.

Przypuśćmy, że suma wszystkich 50 iloczynów jest równa 0. Wtedy dokładnie $25-n$ liczb spośród $b_1, b_2, \ldots, b_{25}$ równa się -1. To z kolei oznacza, że iloczyn wszystkich liczb stojących w tablicy wynosi $(-1)^{25-n}$. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż liczby n oraz $25-n$ są różnej parzystości; ich suma, czyli liczba 25, jest nieparzysta.

ku masie $1-\mu$ w lewo, ku μ w prawo oraz przyspieszenie odśrodkowe skierowane też w prawo. Może więc te trzy przyspieszenia gdzieś się równoważą? Jeżeli tak, to położenie tego osobliwego punktu x określi równanie (pamiętajmy o uproszczonych jednostkach):

$$\frac{1-\mu}{(\mu+x)^2}=\frac{\mu}{(1-\mu-x)^2}+x.$$

Czy ma ono rozwiązanie względem x? Każdy widzi, że po zlikwidowaniu mianowników i uporządkowaniu powstaje zwykłe równanie algebraiczne, tylko – niestety – piątego stopnia. A więc rozwiązanie na pewno jest, lecz w ogólnym przypadku nie potrafimy go zapisać wzorem algebraicznym. Zawsze jednak można numerycznie znaleźć owo x, czyli położenie tzw. punktu Lagrange'a lub libracji L_1. Łatwo już teraz zgadnąć i sprawdzić, że na osi x musi istnieć drugi punkt Lagrange'a L_2 w prawo od μ (dwa przyspieszenia grawitacyjne w lewo i jedno odśrodkowe w prawo) i trzeci L_3 w lewo od masy $1-\mu$ (dwa przyspieszenia grawitacyjne w prawo i odśrodkowe w lewo). We wszystkich przypadkach położenia punktów libracji (mówimy „liniowych") określają analogiczne równania, oczywiście również piątego stopnia. Nawiasem mówiąc, rzadko zdarza się, by cokolwiek w przyrodzie było określone przez równanie piątego stopnia.



Gdybyśmy zgłębiali ten problem uczenie, to wykrylibyśmy jeszcze dwa punkty libracji. Ale z użyciem tylko szkolnej matematyki poprzestaniemy na sprawdzeniu, że te pozostałe dwa punkty libracji (L_4 i L_5) leżą w wierzchołkach trójkątów równobocznych rozpiętych na odcinku R łączącym masy ciężkie. A sprawdzenie jest już łatwe. Oto dowód. Rachunek trzeba przeprowadzić na składowych, bo te trzy przyspieszenia są teraz skierowane w trzech kierunkach. Przyspieszenie ku masie cięższej to $(1-\mu)[-1/2,\ -\sqrt{3}/2]$, ku masie lżejszej to $\mu[1/2,\ -\sqrt{3}/2]$. Odśrodkowe jest skierowane w kierunku OL_4 i jego składowe wynoszą po prostu $[\frac{1}{2}-\mu,\ \sqrt{3}/2]$, bo przecież $\omega=1$. Dzięki doborowi jednostek wystarcza zajmować się geometrią trójkąta równobocznego! W każdym razie suma trzech wektorów zeruje się, co kończy dowód. Punkt libracji L_5 leży symetrycznie względem L_4 po drugiej stronie osi x. Warto tu zwrócić uwagę, że masy ciężkie i te dwa punkty Lagrange'a (mówimy „trójkątne") tworzą trójkąty zawsze równoboczne, tj. bez względu na wartości owych mas.

Na koniec każdy spyta, co to wszystko ma do przyrody. Otóż ma! Zawsze tak jest, że jeżeli prawa przyrody czegoś nie zabraniają, to przyroda to zrealizuje. Dlatego w trójkątnych punktach libracji znajdujemy chociażby: planetoidy trojańskie w układzie Słońce–Jowisz (Grecy są w L_4, a Trojanie w L_5), pyłowe księżyce Ziemi w układzie Ziemia-Księżyc (przyznajmy – nie wszyscy wierzą w ich istnienie), przynajmniej po jednym małym satelicie w układzie Saturn–Dione i Saturn–Tethys. Oczywiście, te wszystkie ciała znikome nie powstały w punktach libracji, lecz musiały przylecieć z daleka. Skoro przyleciały, to w przyszłości odlecą, ale przez pewien czas mają prawo ciasno obiegać punkty libracji, sprawiając wrażenie, że tam tkwią. A w liniowych punktach Lagrange'a nic nie ma? Rzeczywiście, nie ma, gdyż w nich równowaga trzech przyspieszeń jest zawsze chwiejna, w przeciwieństwie do punktów trójkątnych, w których równowaga jest trwała, jeżeli tylko $\mu<0{,}038521\ldots$, co zachodzi w wymienionych tu przypadkach. Niestety, zbadanie charakteru równowagi jest znacznie trudniejsze niż odkrycie samej równowagi. Inaczej mówiąc, do wykazania własności punktów Lagrange'a, czy skąd bierze się ta ostatnia liczba, szkolna matematyka już nie wystarcza.

Rozwiązanie zadania F 701.

Pod działaniem siły $F=IBl$ w ciągu czasu τ pręt osiągnie prędkość $v=IBl\tau/m$. Z zasady zachowania energii mamy, że $mv^2/2=mgh(1-\cos\alpha_{\max})$, stąd maksymalny kąt wychylenia ramki wynosi $\alpha_{\max}=2\arcsin\dfrac{IBl\tau}{2m\sqrt{gh}}$.