

Liftowane piłki, czyli rzecz o efekcie Magnusa

Stanisław BEDNAREK



Oglądając mecze piłkarskie lub tenisowe, możemy czasem zauważyć ruch piłki po linii krzywej, daleko odbiegającej swym kształtem od paraboli czy odcinka zbliżonego do prostej. Takie piłki, nazywane liftowanymi, lub podkręcanymi są ze względu na nieprzewidywalność swego toru ruchu bardzo trudne do przyjęcia przez przeciwnika. Spróbujmy postawić pytanie, co jest przyczyną ruchu piłki po tak niezwykłym torze. Jak wiadomo, na piłkę w locie działa siła przyciągania grawitacyjnego Ziemi i siła oporu powietrza. Na rozkład przestrzenny pola grawitacyjnego Ziemi wpływu nie mamy. Pozostaje więc, jako sprawca niezwykłego ruchu piłki, opór powietrza.

Żeby przekonać się, jak opór powietrza wpływa na ruch piłki, przeprowadźmy następujące doświadczenie. Kartkę kartonu formatu A4 z bloku technicznego zwijamy wzdłuż dłuższego boku w rurkę i skleamy brzeg na zakładkę o szerokości około 1 cm (rys. 1). Końce rurki nacinamy na głębokość 1,5 cm co 1 cm i odginamy utworzone w ten sposób prostokąty na zewnątrz. Z kartonu wycinamy dwa koła o średnicy 12 cm i przyklejamy je do odgiętych prostokątów. W środkach kół wykonujemy ostrym końcem nożyczek dwa otworki o średnicy 1–2 mm i przekładamy przez nie cienki patyczek do szaszłyków o długości około 30 cm, tak żeby z każdej strony walca wystawał około 4,5 cm.

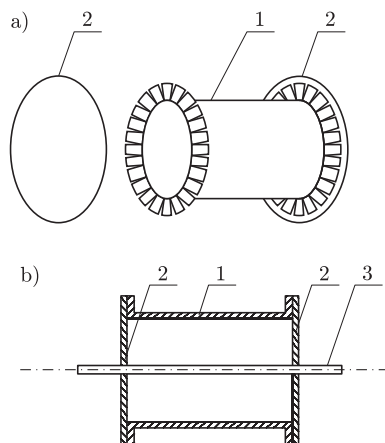
Teraz możemy przystąpić do eksperymentów. Wchodzimy na taboret lub krzesło i trzymamy nasz walec za wystające końce patyczka w wyciągniętych do góry rękach, tak żeby patyczek był poziomo (rys. 2). Puszczamy walec i obserwujemy jego ruch. Pomieszczenie, w którym przeprowadzamy doświadczenie, powinno być wolne od wszelkich podmuchów powietrza. Okazuje się, że walec spada pionowo. Ponownie wchodzimy na taboret lub krzesło, trzymamy walec jak poprzednio palcami za wystające końce patyczka i pokręcamy nimi w palcach, tak żeby wprawić walec w możliwie szybki ruch obrotowy, np. w prawo, i puściliśmy walec swobodnie, obserwując jego ruch. Okazuje się, że walec wprawiony w ruch obrotowy w prawo podczas spadku odchyła się w lewo. Powtarzamy ostatnie doświadczenie, wprawiając walec w ruch obrotowy w kierunku przeciwnym do poprzedniego i obserwujemy jego spадanie. Tym razem walec odchyła się w prawo.

Powstaje problem, jak wyjaśnić zachowanie się walca, gdy został on wprawiony w ruch obrotowy. Poruszający się w powietrzu walec dzięki siłom lepkości wprawia w ruch otaczające go powietrze. Najprostsze, ilościowo poprawne rozwiązanie, nieoddające jednak w pełni złożoności zjawiska, można uzyskać odwołując się do równania Bernoulliego. Równanie to opisuje zachowanie się strugi płynu (cieczy lub gazu) będącego w ruchu. Prawo to wyraża się następującym wzorem

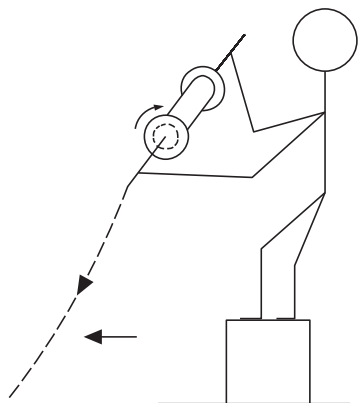
$$(1) \quad p + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const},$$

w którym p oznacza ciśnienie płynu, ρ – gęstość płynu, g – przyspieszenie ziemskie, h – wysokość słupa płynu, v – prędkość płynu. Drugi składnik ρgh we wzorze (1) oznacza ciśnienie spowodowane ciężarem płynu, a trzeci $(\rho v^2)/2$ ciśnienie dynamiczne. W warunkach naszego doświadczenia ciśnienie spowodowane ciężarem płynu można pominąć ze względu na małą wartość gęstości powietrza ρ oraz małą wysokość h .

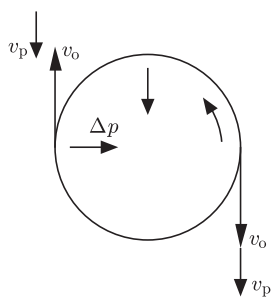
Gdy walec spada, nie obracając się, wtedy prędkości powietrza po obu jego stronach są równe i na walec nie działa żadna siła pozioma. Kiedy walec spada, obracając się, np. w lewo (rys. 3), wówczas prędkości ruchu obrotowego v_o i ruchu postępowego v_p sumują się po prawej stronie walca, a odejmują po lewej. Powoduje to, że prędkość strumienia powietrza otaczającego walec z prawej strony będzie większa niż z lewej. Żeby równanie (1) było spełnione, z lewej strony musi pojawić się dodatkowe ciśnienie Δp działające w prawo. Spowodowana tym ciśnieniem siła odchyła tor ruchu walca w prawo. Jako



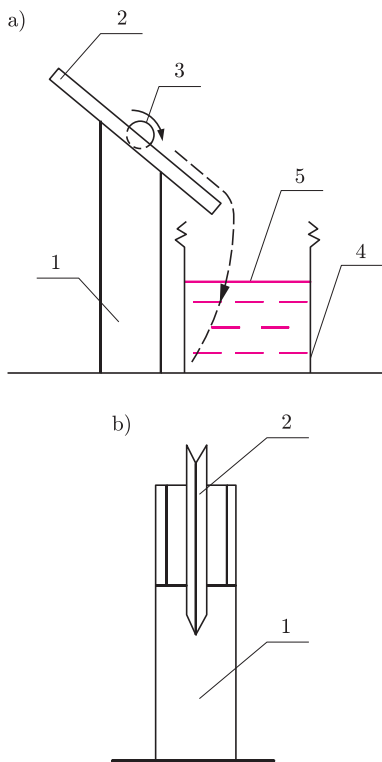
Rys. 1. Budowa walca do badania efektu Magnusa: a) widok ogólny, 1 – rurka z kartonu, 2 – koła; b) przekrój osiowy, 3 – cienki patyczek.



Rys. 2. Sposób puszczenia walca podczas badania efektu Magnusa.



Rys. 3. Układ prędkości i ciśnienie wyjaśniający jeden z przypadków efektu Magnusa.



ćwiczenie warto przeanalizować rozkład prędkości i kierunek dodatkowego ciśnienia Δp podczas obrotu walca w lewo. Zaobserwowany przez nas efekt odchylenia kierunku ruchu obracającego i przesuwanego się w płynie ciała stałego nazwany jest od nazwiska jego odkrywcy efektem Magnusa.

Działanie siły Magnusa powodującej zakrzywienie toru w efekcie Magnusa możemy również łatwo zaobserwować w przypadku kulek poruszających się w wodzie lub oleju. Ponieważ gęstość wody lub oleju jest szacunkowo około tysiąca razy większa od gęstości powietrza, tyleż razy będzie większa siła Magnusa. Wzór opisujący tę siłę jest następujący.

$$(2) \quad P_m = \pi \rho_p v u d l.$$

We wzorze (2) P_m oznacza wartość siły Magnusa, l – długość walca, d – jego średnicę, v, u – odpowiednio prędkość unoszenia i prędkość opływu walca w odległości, na której ruch jest niezaburzony, czyli w dostatecznie dużej odległości od walca, ρ_p – gęstość płynu. Jako ciekawostkę warto dodać, że niemiecki fizyk i chemik w jednej osobie, Kutta, oraz badacz rosyjski, Żukowski, podali prawie jednocześnie ten wzór na obliczenie siły Magnusa.

Przystąpimy teraz do zbadania efektu Magnusa w cieczach. Potrzebne będzie akwarium, które z powodzeniem można zastąpić pięciolitrowym stoikiem od przetworów spożywczych. Ponadto tekturowe pudełko dwukrotnie wyższe od słoika, dwie linijki o długości 50 cm oraz taśma klejąca i nożyczki. Nieco uwagi należy poświęcić kuleczce, która staczać się będzie do płynu. Powinna mieć ona średnicę około 1–2 cm i być wykonana z materiału o gęstości nieco większej od gęstości wody. Z powodzeniem można tu zastosować kulisty koralik z tworzywa sztucznego.

Tym razem przeprowadzamy doświadczenie w ten sposób, że umieszczamy kulkę w pobliżu szczytu rynienki i puszcza ją swobodnie, pozwalając się jej stoczyć do wody. Obserwujemy uważnie ruch kuleczki w wodzie. Wbrew oczekiwaniom tor kuleczki w wodzie zakrzywia się i kuleczka zamiast po paraboli porusza się po torze o kształcie zbliżonym do odwróconej litery C. Z jeszcze bardziej kuriozalnym przypadkiem spotkali się żołnierze niemieccy, kiedy stwierdzili, że podczas strzelania z moździerza gładkimi pociskami jeden z nich poruszał się po pętli, a następnie spadł za strzelającymi. Na szczęście, mówiąc językiem wojskowym, obyło się bez strat siły żywej i sprzętu.

Rys. 4. Układ do badania efektu Magnusa w wodzie;

a) widok z boku:

- 1 – tekturowe pudełko,
- 2 – rynienka,
- 3 – kulka,
- 4 – akwarium lub duży słoik,
- 5 – woda,

b) widok z przodu.

Równanie Pitagorasa w kongruencjach

Anna SILKA*, Tomasz SZEMBERG*

W 1994 roku Andrew Wiles udowodnił sformułowane w XVII wieku Wielkie Twierdzenie Fermata, które głosi, że równanie

$$(1) \quad x^n + y^n = z^n$$

dla $n \geq 3$ nie ma nietrywialnych (tj. takich, że wszystkie liczby x, y, z są różne od zera) rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych.

Z drugiej strony wiadomo, że dla $n = 2$ równanie

$$(2) \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

którego nie sposób nie skojarzyć z imieniem Pitagorasa, ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych.

W tym artykule chcemy się zastanowić, ile rozwiązań ma równanie Pitagorasa w ciele \mathbb{Z}_p , dla ustalonej nieparzystej liczby pierwszej p . Mówiąc nieco górnolotnie, będziemy się zajmować geometrią algebraiczną nad pewnymi ciałami skończonymi. Liczenie rozwiązań pewnych równań typu (1) modulo p stanowiło istotny element dowodu Wileasa.

Przypomnijmy, że ciało \mathbb{Z}_p to zbiór reszt z dzielenia przez p , tzn.

$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, \dots, (p-2), (p-1)\}$, w którym działania określone są niemal

*Akademia Pedagogiczna, Kraków