Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2007

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
535 ($WT = 2{,}64$) i **536** ($WT = 1{,}53$)
z numeru 2/2007

Tomasz Warszawski	– Kraków	45,32
Tomasz Wietecha	– Tarnów	43,17
Andrzej Daniluk	– Warszawa	42,70
Dariusz Kurpiel	– Posada Zarszyn	42,51
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	38,05
Grzegorz Karpowicz	– Wrocław	36,73
Witold Bednarek	– Łódź	36,18

Tomek Warszawski – po raz drugi.

Zadania z matematyki nr 547, 548

Redaguje Marcin E. KUCZMA

547. Udowodnić nierówność $\left(\dfrac{x^{2/3}+y^{2/3}}{2}\right)^3 > \left(\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{3\sqrt{x}-3\sqrt{y}}\right)^2$ dla liczb rzeczywistych $x > y > 0$.

548. Dla dodatnich liczb całkowitych a, b niech $M(a,b)$ oznacza liczbę par (x,y), których wyrazy x, y są dodatnimi liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, spełniającymi warunki $x \leqslant a$, $y \leqslant b$. Wykazać, że

$$M(a,b) = \sum_{r\geqslant 1} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor \mu(r),$$

gdzie μ jest funkcją Möbiusa, określoną wzorami

$$\mu(r) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } r = 1, \\ (-1)^k & \text{gdy } r \text{ jest iloczynem } k \text{ różnych czynników pierwszych,} \\ 0 & \text{gdy } r \text{ dzieli się przez kwadrat liczby pierwszej.} \end{cases}$$

Zadanie 548 zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2007

Przypominamy treść zadań:

543. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające warunki

$$x\,(f(x+1) - f(x)) = f(x) \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R},$$
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \qquad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

544. Jak wiadomo (od czasów Eulera), równanie $x^3 + y^3 = z^3$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z. A czy równanie $x^{3/2} + y^{3/2} = z^{3/2}$ ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z?

543. Niech f będzie jedną z szukanych funkcji; jasne, że $f(0) = 0$. Oznaczmy $f(x)/x = g(x)$ dla $x \neq 0$. Podstawiając $f(x) = xg(x)$ do zadanego równania, dostajemy zależność $x(x+1)g(x+1) = x(x+1)g(x)$. Zatem

$$(1) \qquad g(x+1) = g(x) \quad \text{dla } x \neq -1, 0.$$

Stąd przez indukcję

$$g(x+n) = g(x) \quad \text{dla } x > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots\,;$$
$$g(x-n) = g(x) \quad \text{dla } x < 0, \quad n = 1,2,3,\ldots\,.$$

Drugi z warunków zadania przyjmuje postać

$$(2) \qquad |xg(x) - yg(y)| \leqslant |x-y|.$$

Ustalmy liczby $a, b > 0$ i podstawmy w (2) $x = a+n$, $y = b+n$:

$$|(a+n)g(a) - (b+n)g(b)| \leqslant |a-b| \quad \text{dla } n = 1,2,3,\ldots.$$

Gdyby liczby $g(a)$, $g(b)$ były różne, uzyskany po lewej stronie ciąg dążyłby do nieskończoności. Zatem $g(a) = g(b)$ dla $a, b > 0$. To znaczy, że funkcja g jest stała na przedziale $(0, \infty)$.

Analogicznie uzasadniamy, że jest też stała na przedziale $(-\infty, 0)$. Obie te stałe są równe, jak pokazuje równanie (1) (np. dla $x = -1/2$). Tak więc $g(x) \equiv c$ dla $x \neq 0$; nierówność (2) mówi zaś, że $|c| \leqslant 1$.

Wniosek: funkcja f ma postać $f(x) = cx$ dla $x \in \mathbb{R}$ (c – stała, $|c| \leqslant 1$) i każda funkcja tej postaci spełnia wymagane warunki.

544. Odpowiedź: *nie.*

Dowód: Przypuśćmy, że liczby naturalne (w znaczeniu: liczby całkowite dodatnie) x, y, z spełniają podane równanie. Po podniesieniu stronami do kwadratu mamy

$$(3) \qquad x^3 + 2xy\sqrt{xy} + y^3 = z^3.$$

Widać stąd, że xy jest kwadratem liczby wymiernej; a skoro xy jest liczbą naturalną, jest też kwadratem liczby naturalnej: $xy = t^2$. Niech $d = \mathrm{NWD}(x,y)$; tak więc

$$d^2 \cdot \frac{x}{d} \cdot \frac{y}{d} = t^2.$$

Liczby naturalne x/d, y/d są względnie pierwsze, więc z uzyskanej zależności wynika, że każda z nich jest kwadratem liczby naturalnej: $x = du^2$, $y = dv^2$. Podstawiamy to do równania (3) i otrzymujemy

$$d^3(u^3+v^3)^2 = z^3.$$

Zatem z dzieli się przez d. Przyjmując $z = ds$, dostajemy równość $(u^3+v^3)^2 = s^3$, z której wynika, że s jest kwadratem liczby naturalnej, $s = w^2$, i ostatecznie $u^3 + v^3 = w^3$. Ale to ostatnie równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

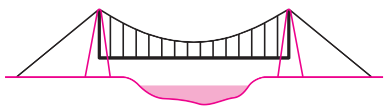
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2007

Zadania z fizyki nr 444, 445

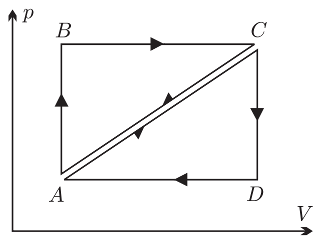
Redaguje Jerzy B. BROJAN

444. Most jest zawieszony na kablu (rys. 1). Znaleźć postać funkcji opisującej kształt kabla, jeśli ciężar mostu jest równo rozłożony wzdłuż osi poziomej, odstępy pomiędzy linami pionowymi są niewielkie, a ich ciężar oraz ciężar samego kabla można pominąć. Jeśli ciężar mostu jest równy P, długość l, a obniżenie środkowego punktu kabla względem najwyższych – h, to ile wynosi siła napięcia kabla w środku, a ile – w najwyższych punktach?



Rys. 1

445. Na rysunku 2 przedstawiono dwa cykle termodynamiczne, w których przemianom podlega gaz doskonały. Cykle mają wspólny odcinek AC (choć przebiegany z przeciwnym zwrotem). Sprawność którego cyklu jest wyższa, czy też są one jednakowe? Rozważyć przypadki: a) $T_B = T_D$, b) $T_B > T_D$.

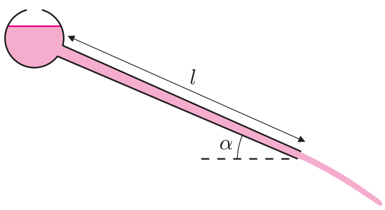


Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2007

Przypominamy treść zadań:

440. Jaś mieszka w wysokim budynku i zabawia się, oblewając przechodniów wodą z okna. Używa w tym celu konewki (schemat – zob. rys. 3), a żeby sięgnąć strumieniem wody bliżej lub dalej, zmienia jej kąt pochylenia α. Jaki kąt da mu największy zasięg strumienia? Jak daleko powinien stać przechodzień, aby czuć się bezpiecznie? Długość konewki l i wysokość spadku h są dane (oczywiście $l \ll h$). Opór powietrza należy pominąć.



Rys. 3

441. Dwa równoległe długie przewodniki prostoliniowe o promieniu $r = 1\,\mathrm{mm}$ są odległe o $d = 10\,\mathrm{cm}$. Z jednej strony do ich końców przyłożono pewne napięcie, a z drugiej połączono je opornikiem R (rys. 4). Opór samych przewodników można pominąć. Jaka powinna być wartość R, aby siła elektrostatycznego przyciągania ładunków na jednym i drugim przewodniku równoważyła się z siłą magnetycznego odpychania przewodników, wynikającą z przepływu prądu? Względna przenikalność elektryczna i magnetyczna ośrodka wynosi 1.

Rys. 4

440. Jeśli można pominąć opory ruchu wody w konewce (lepkość i wiry), to prędkość v wypływającej wody można obliczyć z zasady zachowania energii (tzn. z równania Bernoulliego):

$$v = \sqrt{2gh_k} = \sqrt{2gl\sin\alpha}\,,$$

gdzie $h_k = l\sin\alpha$ jest wysokością spadku wody wewnątrz konewki. Ze względu na warunek $l \ll h$ składowa pionowa początkowej prędkości wody nie ma znaczenia i istotna jest tylko jej pozioma składowa, równa

$$v_x = \sqrt{2gl\sin\alpha}\cos\alpha\,.$$

Przyrównując pochodną względem α do zera, nietrudno wykazać, że maksymalna wartość v_x występuje dla kąta α spełniającego warunek: $\sin^2\alpha = 1/3$, czyli $\alpha = 35{,}3^\circ$. Czas spadku z wysokości h jest równy $t = \sqrt{2h/g}$, a więc zasięg figlów Jasia wynosi

$$z = 2k\sqrt{hl},$$

gdzie k jest maksymalną wartością wyrażenia $\sqrt{\sin\alpha}\cos\alpha$, równą $k = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}62$.

441. Natężenie pola elektrycznego nici naładowanej z liniową gęstością ładunku λ (ładunkiem na jednostkę długości) w odległości ρ od tej nici wynosi

$$E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\,.$$

Całkując, otrzymujemy różnicę potencjałów między punktami odległymi o r i d od nici

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{r}\,.$$

Napięcie U między dwoma równoległymi przewodnikami naładowanymi przeciwnymi ładunkami jest równe $2\Delta V$, gdyż pole pochodzi od obu przewodników. Przyjmując, że U jest dane, możemy stąd wyznaczyć λ, a następnie siłę przyciągania elektrostatycznego na jednostkę długości

$$\frac{F_{elst}}{l} = \lambda E(d) = \frac{U^2\pi\varepsilon_0}{2d\ln^2(d/r)}\,.$$

To wyrażenie należy przyrównać do siły odpychania magnetycznego

$$\frac{F_{magn}}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I^2}{d} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{U^2}{R^2 d}\,.$$

Stąd

$$R = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{d}{r}\right)\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 552\,\Omega\,.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
436 ($WT = 2{,}68$) i **437** ($WT = 2{,}29$)
z numeru 4/2007

Krzysztof Magiera	– Łosiów	43,97
Tomasz Wietecha	– Tarnów	34,52
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	31,61
Jerzy Witkowski	– Radlin	31,60
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	24,58
Jacek Konieczny	– Poznań	19,16
Radosław Poleski	– Kołobrzeg	18,38