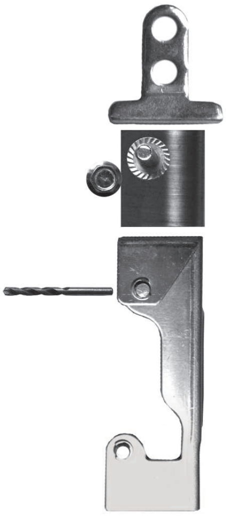
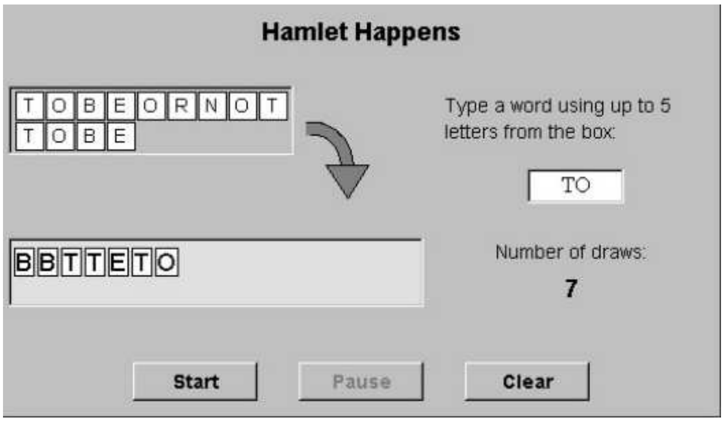
Grać albo nie grać?

Andrzej WALAT



Każdy, kto zna sławną sztukę Szekspira o Hamlecie, księciu Danii, wie, że była to postać tragiczna, którą los zmuszał do trudnych wyborów bez dostatecznych przesłanek, właściwie na podstawie wyniku rzutów kośćmi. Na stronie uniwersytetu stanu Utah `nlvm.usu.edu` można znaleźć aplet pod tytułem *Hamlet Happens*. Ten tytuł trudno wiernie i krótko przełożyć na polski, ale jego sens jest chyba taki: Każdemu może się przydarzyć, że znajdzie się w sytuacji Hamleta. Tobie także.

Rysunek 1 przedstawia ekran apletu. Widać na nim słynną kwestię Hamleta: `to be or not to be` (być albo nie być) napisaną bez odstępów jako jedno trzynastoliterowe słowo.



Rys. 1

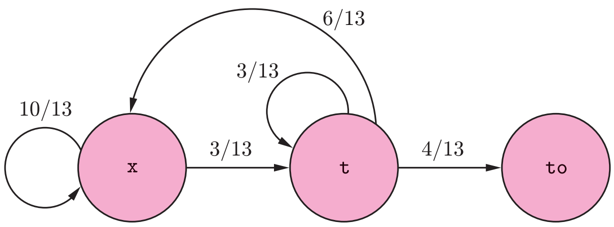
W polu tekstowym pod napisem „Type a word using up to 5 letters from the box” należy wpisać dowolne słowo utworzone z co najwyżej 5 liter wybranych z hasła (kwestii Hamleta). Po kliknięciu przycisku Start komputer zaczyna losowanie. Będzie losował litery i wpisywał je w polu tekstowym pod hasłem tak długo, aż utworzy wybrane przez nas słowo. Na rysunku widać, że wybraliśmy słowo `to` i komputer losował litery 7 razy, aż otrzymał to słowo. Apletu *Hamlet Happens* można używać jako maszynki losującej w wielu różnych grach losowych. Zacznijmy od bardzo prostej gry. Nazwiemy ją grą Hamleta.

Wybierasz dowolne dwuliterowe słowo utworzone z liter występujących w kwestii Hamleta i naciskasz Start. Kiedy komputer utworzy wreszcie wybrane przez Ciebie słowo, otrzymasz nagrodę 12 zł, ale przedtem za każde wylosowanie litery musisz zapłacić 1 zł.

W przypadku gry, której wynik przedstawia rysunek 1, musiałbyś zapłacić za losowanie kolejnych liter 7 zł i otrzymałbyś nagrodę 12 zł. Wygrałbyś na czysto 5 zł. Ale innym razem bilans mógłby być ujemny. Twoje hamletyczne pytanie brzmi: Grać czy nie grać? Zaraz za nim nasuwa się następne pytanie: Jakie dwuliterowe słowo wybrać, żeby mieć największe szanse sukcesu finansowego? Na początek załóżmy, że będziesz zawsze wybierał słowo `to`. Czy gra się opłaci? Spróbujemy rozstrzygnąć tę kwestię najpierw empirycznie, a potem teoretycznie.

Rozwiązanie empiryczne

Maszynka losująca *Hamlet Happens*, zanim osiągnie cel, przechodzi przez różne stany. W przypadku przedstawionym na rysunku 1 kolejne stany gry to podsłowa słowa `bbtteto`, czyli: słowo puste, słowo jednoliterowe `b`, słowo `bb`, itd. aż do stanu końcowego `bbtteto`. Jest ich łącznie osiem, a ogólnie, w dowolnym przypadku gry z wybranym słowem kończącym `to`, nieskończenie wiele. Podzielimy je na trzy grupy stanów istotnie różnych: słowa kończące się na `to`, słowa kończące się na literę `t` oraz wszystkie inne, te oznaczymy literą `x`. Każda gra zaczyna się od stanu początkowego `x` i kończy stanem końcowym `to`. Można ją opisać za pomocą następującej planszy (grafu).



Rys. 2

Gra Hamleta jest równoważna losowej wędrówce pionka po planszy od pola początkowego `x` do końcowego `to`. Liczby przy strzałkach oznaczają prawdopodobieństwa tego, że pionek w kolejnym ruchu pójdzie na pole wskazywane przez strzałkę.

Literom x oraz t, oznaczającym pola planszy, możemy nadać nowy sens:

x – to liczba ruchów, po których pionek ustawiony na polu x dojdzie do pola końcowego to,

t – to liczba ruchów, po których pionek ustawiony na polu t dojdzie do pola końcowego to.

Symbole x oraz t mają więc sens podobny jak wyrażenie wynik rzutu kostką. Wynikiem rzutu kostką może być 1, 2, 3, 4, 5 albo 6. Wartość x to losowa liczba całkowita nie mniejsza niż 2. Wartość t – to losowa liczba całkowita nie mniejsza niż 1. Dokładniej: wartość x to zawsze 1 plus wartość t albo x, zależnie od wyniku losowania litery ze słowa tobeornottobe; jeżeli wypadnie litera t, to do jedynki trzeba dodać wartość t, a w przeciwnym przypadku wartość x. W języku programowania Logo można to zapisać w następujący sposób:

```
oto x
wynik
  1 + jeżeli los "tobeornottobe = "t [t][x]
już
```

Losowa wartość t to zawsze 1 plus wartość t, wartość x lub 0 zależnie od wyniku losowania litery ze słowa tobeornottobe. Jeśli wylosowaną literą jest t, to dajemy wartość t, jeśli o, to dodajemy 0, a w każdym innym przypadku wartość x. W języku Logo kodujemy to w następujący sposób:

```
oto t
wynik
  1 + wybierz los "tobeornottobe [t [t] o [0] [x]]
już
```

Po napisaniu `powtórz 10 [wpisz 12 - x wpisz "|, |]` otrzymaliśmy wyniki finansowe 10 gier: 7, 1, -4, 8, 9, 2, -17, 4, -30, 5. W tej serii częściej wygrywaliśmy niż przegrywaliśmy, ale ogólny bilans jest ujemny; w sumie przegraliśmy 15 zł. Wynik eksperymentu może wskazywać, że jeśli nagroda wynosi 12 zł, to chyba nie opłaca się grać, ale 10 prób to trochę za mało, by na ich podstawie wnioskować w sposób pewny. Zdefiniujemy dwie dodatkowe funkcje śx :n – średnia z n wartości x oraz św :n – średnia wartość wygranej w n grach.

```
oto śx :n
niech "s 0
powtórz :n [przyp "s :s + x]
wynik :s / :n
już
```

```
oto św :n
wynik 12 - śx :n
już
```

Można teraz obliczyć średnią wygraną w serii 10000 gier. Na polecenie pisz św 10000 komputer wypisał na ekranie -2.0353. Teraz możemy powiedzieć z dużą pewnością, że gra się nie opłaci. Jaka powinna być nagroda, żeby gra się opłaciła? Nie mniejsza niż średnia wartość x. Na polecenie pisz św 10000 komputer wypisał 14.257. Ale to tylko empiryczna średnia z 10000 wartości x. Polecenie

```
powtórz 10 [wpisz śx 10000 wpisz "|, |]
```

powoduje wypisanie 10 różnych średnich z 10000 wartości x. Rezultat: 14.11, 13.797, 14.1819, 14.2667, 14.309, 14.1065, 13.8894, 14.2784, 14.1372, 13.9415 wskazuje, że dokładna teoretyczna wartość średnia x jest chyba nieznacznie większa niż 14. Ale jaka ona dokładnie jest?

Rozwiązanie teoretyczne

Treść definicji x oraz t w Logo, w postaci jednowierszowego zdania zaczynającego się od słowa wynik, może trochę przypominać znane powszechnie równania matematyczne. Ale to nie są zwykłe (statyczne) równania, tylko ich dynamiczne odpowiedniki określające sposób wyznaczania losowych wartości x oraz t. Oznaczmy teoretyczne średnie wartości x oraz t symbolami: $\bar{\mathtt{x}}$ oraz $\bar{\mathtt{t}}$. Losowa wartość x to zawsze 1 plus: w $\frac{3}{13}$ przypadków wartość t, a w pozostałych $\frac{10}{13}$ przypadków – wartość x. Losowa wartość t to zawsze 1 plus: w $\frac{3}{13}$ przypadków wartość t, w $\frac{4}{13}$ przypadków – 0, a w pozostałych $\frac{6}{13}$ przypadków – wartość x. Wnioskujemy, że średnie powinny spełniać następujące równości:

$$\bar{\mathtt{x}} = 1 + \frac{3}{13}\bar{\mathtt{t}} + \frac{10}{13}\bar{\mathtt{x}},$$
$$\bar{\mathtt{t}} = 1 + \frac{3}{13}\bar{\mathtt{t}} + \frac{4}{13}\cdot 0 + \frac{6}{13}\bar{\mathtt{x}}.$$

Po rozwiązaniu tego układu dwóch równań liniowych otrzymujemy teoretyczny średni czas oczekiwania na słowo to (tj. średnią liczbę losowań, po których otrzymujemy to):

$$\bar{\mathtt{x}} = \frac{169}{12} \approx 14{,}08\,.$$

Komentarz

Litera t występuje w haśle tobeornottobe z częstością $\frac{3}{13}$, a litera o z częstością $\frac{4}{13}$. Nietrudno zauważyć, że

$$\frac{169}{12} = \frac{13}{3}\cdot\frac{13}{4}.$$

Może to nasuwać hipotezę, iż gdybyśmy w naszej grze zamiast dwuliterowego słowa to wybrali dowolne inne słowo utworzone z liter $l_1 l_2 \ldots l_n$ występujących w danym haśle odpowiednio z częstością: $p_1, p_2 \ldots$ oraz p_n, to teoretyczny średni czas oczekiwania na wygenerowanie tego słowa w naszej grze byłby równy iloczynowi odwrotności częstości:

$$\frac{1}{p_1}\cdot\frac{1}{p_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{p_n}.$$

Gdyby to była prawda, to mielibyśmy ogólną, niezwykle prostą metodę wyznaczania teoretycznego średniego czasu oczekiwania na wygenerowanie dowolnego słowa utworzonego z liter danego hasła – znacznie prostszą niż zastosowana przez nas metoda polegająca na rozwiązaniu układu równań liniowych. Ale czy to prawda?