$3x + 1$

Proponuję naszym drogim Czytelnikom następującą grę. Gra się w nią we dwójkę. Pierwszy gracz wybiera liczbę naturalną, drugi gracz przetwarza ją zgodnie z regułami, o których za chwilę. Jeśli uda mu się dojść do liczby 1, zdobywa punkt. Jeśli nie – punkt przysługuje pierwszemu graczowi, który wtedy wymyśla następną liczbę i gra się powtarza. Jeśli drugiemu graczowi udaje się uzyskać 1, przejmuje inicjatywę i teraz on wymyśla liczbę dla przeciwnika. Gra toczy się do momentu, w którym ktoś osiągnie z góry ustaloną liczbę punktów – albo do znudzenia. Jakie są reguły przetwarzania liczb? Bardzo proste. Jeśli liczba jest parzysta, należy ją podzielić przez 2. Jeśli nieparzysta, należy ją pomnożyć przez 3 i dodać 1. Na przykład, jeśli pierwszy gracz poda liczbę 3, drugi gracz postępuje z nią tak: 3, $3 \cdot 3 + 1 = 10$, $10 : 2 = 5$, $3 \cdot 5 + 1 = 16$, $16 : 2 = 8$, $8 : 2 = 4$, $4 : 2 = 2$, $2 : 2 = 1$. Jest jedynka, punkt zdobyty.

Inaczej mówiąc, definiujemy funkcję f ze zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ w sposób następujący:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{gdy } x \text{ parzysta} \\ 3x + 1 & \text{gdy } x \text{ nieparzysta} \end{cases},$$

a gracz, zaczynając od liczby n, tworzy ciąg $n, f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \ldots$.

Brakuje tu jeszcze pewnego ustalenia, istotnego dla przebiegu gry: jak długo ma się gracz męczyć, żeby dojść do 1 lub uznać, że nie ma na to szans? Jeśli nie ograniczymy liczby przekształceń, może się trafić uparty gracz, który mimo wykonania już mnóstwa operacji na swojej liczbie, wciąż liczy na uzyskanie jedynki i nie chce się poddać.

I chyba ma rację. Można przypuszczać, że wychodząc od dowolnej liczby naturalnej, dojdzie się do liczby 1. Zobaczmy jeszcze kilka przykładów:

$$21, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.$$

$$15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.$$

$$86, 43, 130, 65, 196, 98, 49, 148, 74, 37, 112, 56, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.$$

Są i takie nieduże liczby, dla których obliczenie nie mieści się w jednej linijce. Na przykład, zaczynając od 27, trzeba wykonać 111 kroków, żeby uzyskać 1, mijając po drodze całkiem niemałą liczbę 9232.

Te przykłady nie stanowią, rzecz jasna, dowodu na to, że tak jest zawsze. Ale… dowodu nie ma (dlatego napisałem wyżej „można przypuszczać”). Nikt, jak dotąd, nie zdołał udowodnić hipotezy, że opisane wyżej działania na kolejnych liczbach muszą w każdym przypadku doprowadzić do liczby 1, nikt też tej hipotezy nie obalił. Nie mając dowodu, próbowano sprawdzać za pomocą komputera. Ostatni (znany autorowi w momencie pisania tego tekstu) wynik pochodzi z lutego 2007 roku: sprawdzono, że hipoteza jest prawdziwa dla wszystkich liczb mniejszych od $13 \cdot 2^{58}$, co jest równe w przybliżeniu $3{,}746 \cdot 10^{18}$.

Problem jest znany jako problem Collatza, od nazwiska niemieckiego matematyka Lothara Collatza, który sformułował go w 1937 roku, choć ma też inne nazwy. Jedną z nich jest „problem $3x + 1$”, od reguły postępowania, gdy otrzymany wynik jest liczbą nieparzystą.

Zachęcam Czytelników do podjęcia próby rozstrzygnięcia problemu Collatza, jeśli nie teraz, to w dalszej perspektywie, a tymczasem spróbujmy grać dalej. Czy sytuacja ulegnie zmianie, gdy funkcja przekształcania liczb będzie miała postać taką

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{gdy } x \text{ parzysta} \\ 3x + 3 & \text{gdy } x \text{ nieparzysta} \end{cases},$$

albo taką:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{gdy } x \text{ parzysta} \\ 3x + 7 & \text{gdy } x \text{ nieparzysta} \end{cases}?$$

Może Czytelnikowi też uda się sformułować własną hipotezę?

Małą Deltę przygotowali Marek KORDOS i Wiktor BARTOL