Metody Monte Carlo

Rafał SZTENCEL

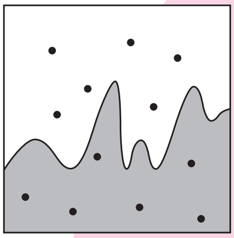
Następnie sporządził odlew „morza” o średnicy dziesięciu łokci, okrągłego o wysokości pięciu łokci i o obwodzie trzydziestu łokci. Poniżej jego krawędzi opasywały je dokoła rozchylone kielichy kwiatowe. Na trzydzieści łokci otaczały „morze” w krąg. W jego odlewie były razem odlane dwa rzędy rozchylonych kielichów kwiatowych.

1 Krl 7, 23–24

W poprzednim odcinku pisaliśmy o doświadczalnym wyznaczaniu liczby π za pomocą igły Buffona. Dokładność metody nie była może imponująca, ale w końcu królowi Salomonowi przy poważnych pracach inżynierskich, czyli budowie świątyni, wystarczyło przybliżenie $\pi = 3$ (por. [1], werset na marginesie; szczerze mówiąc, dokładna wartość π nie jest tu potrzebna, co więcej, informacja, że obwód „morza” jest w rzeczywistości nieco większy niż 31,4 łokcia, wywołałaby tylko zamęt w głowach czytelników).

Dziś tak zwane metody Monte Carlo stosuje się m.in. właśnie przy pracach inżynierskich, gdzie – obok założonej dokładności – ważna jest szybkość uzyskania wyniku.

Zilustrujemy metodę prostym przykładem: należy obliczyć $\int_0^1 f(x)dx$, gdzie $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ dla $x \in (0,1)$. Niech X_1, Y_1, X_2, Y_2, $\ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Definiujemy



$$Z_n = \begin{cases} 1 & \text{gdy } Y_n < f(X_n) \\ 0 & \text{gdy } Y_n \geqslant f(X_n) \end{cases} .$$

Zmienne losowe Z_n są niezależne, ponadto

$$EZ_n = P(Y_n < f(X_n)) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

ponieważ wektor losowy (X_n, Y_n) ma rozkład jednostajny na kwadracie $[0,1] \times [0,1]$. Na mocy prawa wielkich liczb

$$\frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n}{n} \to \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad \text{p.n.},$$

więc dla dużych n otrzymamy dobre przybliżenie całki.

Być może obliczanie zwykłej całki w ten sposób jest nieopłacalne w porównaniu np. z metodą Simpsona, ale metoda Monte Carlo przenosi się bez większych zmian na całki wielokrotne, gdzie w pełni ujawnia swoje zalety. Nietrudno bowiem podzielić przedział $[0,1]$ na 10 części, by zastosować jedną ze znanych metod całkowania numerycznego. Ale 100-wymiarowy obszar całkowania należałoby podzielić na 10^{100} części!

Metody Monte Carlo stosuje się także do rozwiązywania równań całkowych i równań różniczkowych cząstkowych (to ostatnie – ze względu na liczne i głębokie związki teorii prawdopodobieństwa z teorią równań różniczkowych cząstkowych).

Rozwiązanie znanego problemu komiwojażera, czyli znalezienia najkrótszej trasy, która pozwoliłaby objechać n miast i wrócić do punktu startowego, wymaga mocy obliczeniowej lawinowo rosnącej wraz z n. Metody probabilistyczne umożliwiają znalezienie całkiem niezłej, bo dłuższej o kilka procent od najkrótszej, trasy w rozsądnym czasie. Okazało się również, że człowiek, posługując się intuicją, jest w stanie podać w miarę szybko równie dobre rozwiązanie tego problemu.

Szybkie, nieporządne i suboptymalne rozwiązania problemów są chyba zgodne z duchem epoki. A jeszcze król Salomon mógł sobie pozwolić na wysokiej klasy architekturę przy budowie świątyni.

Literatura

[1] *Pismo Święte Starego i Nowego Testamentu*, Wydawnictwo Pallottinum, Poznań – Warszawa 1971.