Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\oint\!\!\!\!\!\sum !} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2007

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 545, 546

Redaguje Marcin E. KUCZMA

545. Rozważamy trójkąty ABC spełniające warunek $|ID| = |IE|$, gdzie I jest środkiem okręgu wpisanego, a D, E są punktami przecięcia prostych AI, BI odpowiednio z bokami BC, CA. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb α, β, γ, które mogą być miarami kątów $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ takiego trójkąta.

546. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę niezerowych współczynników wielomianu stopnia n, o współczynnikach rzeczywistych, mającego n różnych pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie 546 zaproponował pan Krzysztof Dorobisz z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2007

Przypominamy treść zadań:

541. Mając daną dodatnią liczbę całkowitą (w zapisie dziesiętnym), możemy dopisać na końcu 0 lub 4 (otrzymując liczbę mającą o jedną cyfrę więcej); ponadto, jeśli dana liczba jest parzysta, wolno nam podzielić ją przez 2. Dowieść, że startując od liczby 4 i wykonując opisane operacje, można uzyskać każdą liczbę całkowitą dodatnią.

542. Cztery okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 o jednakowym promieniu i różnych środkach są położone na płaszczyźnie tak, że o_1, o_2, o_3 mają punkt wspólny A, zaś o_2, o_3, o_4 mają punkt wspólny B, różny od A. Wykazać, że punkty przecięcia tych okręgów, różne od A i B, są wierzchołkami równoległoboku.

541. Niech $f(x) = 10x$, $g(x) = 10x + 4$ dla $x \in \mathbb{N}$ i niech $h(x) = x/2$ dla liczb parzystych $x \in \mathbb{N}$. Wykażemy, że każda dodatnia liczba parzysta daje się przedstawić w postaci $F(4)$ dla pewnej skończonej superpozycji F funkcji f, g, h (jest to teza zadania dla liczb parzystych).

Dowód indukcyjny: dla liczb 2 $(= h(4))$ oraz 4 nie ma czego dowodzić. Ustalmy liczbę parzystą $y > 4$ i załóżmy, że każda mniejsza liczba parzysta $x > 0$ da się przedstawić w wymaganej postaci.

Jeśli ostatnią cyfrą liczby y jest 0, przyjmujemy $x = y/5$; wówczas $y = f(h(x))$.

Jeśli ostatnią cyfrą liczby y jest 2, przyjmujemy $x = (y-2)/5$; wówczas $y = h(g(x))$.

Jeśli ostatnią cyfrą liczby y jest 4, przyjmujemy $x = (y-4)/5$; wówczas $y = g(h(x))$.

Jeśli ostatnią cyfrą liczby y jest 6, przyjmujemy $x = (2y-2)/5$; wówczas $y = h(h(g(x)))$.

Jeśli ostatnią cyfrą liczby y jest 8, przyjmujemy $x = (4y-2)/5$; wówczas $y = h(h(h(g(x))))$.

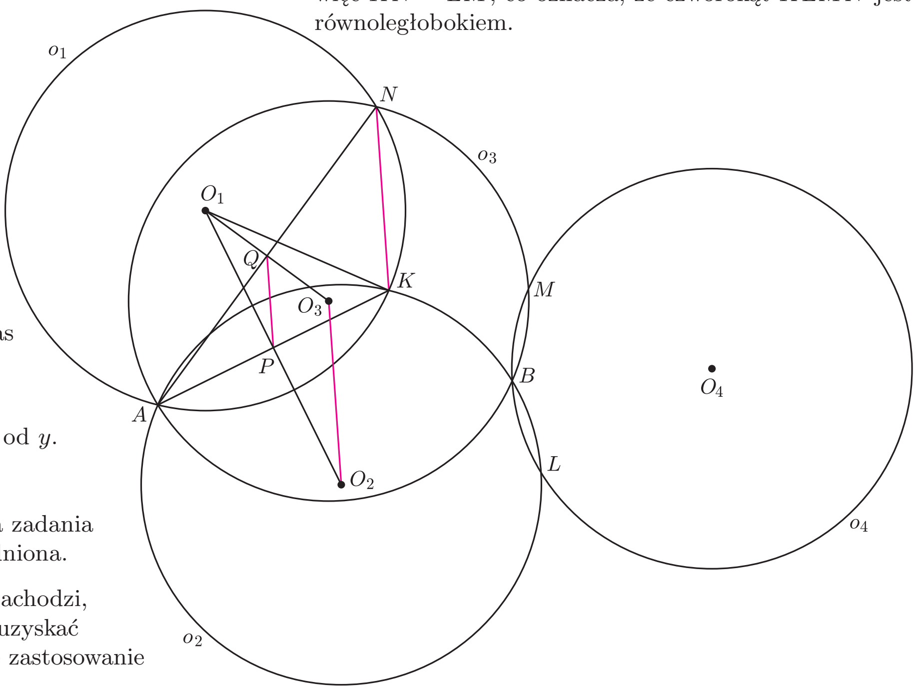
W każdym przypadku x jest parzystą liczbą naturalną, mniejszą od y. Stosując do x założenie indukcyjne, uzyskujemy żądane przedstawienie liczby y; teza zadania dla liczb parzystych została udowodniona.

Dla liczb nieparzystych teza także zachodzi, bo każdą liczbę nieparzystą można uzyskać z liczby parzystej przez jednokrotne zastosowanie funkcji h.

542. Niech O_i będzie środkiem okręgu o_i. Przyjmijmy, że:
okręgi o_1, o_2 przecinają się w punktach A i K;
okręgi o_2, o_4 przecinają się w punktach B i L;
okręgi o_4, o_3 przecinają się w punktach B i M;
okręgi o_3, o_1 przecinają się w punktach A i N.

Te cztery okręgi są przystające. Wobec tego odcinki AK i O_1O_2 mają wspólny środek P, zaś odcinki AN i O_1O_3 mają wspólny środek Q. Zatem $\overrightarrow{KN} = 2 \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{O_2O_3}$.

Analogicznie wykazujemy, że także $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{O_2O_3}$. Tak więc $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{LM}$, co oznacza, że czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem.



Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2007

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
434 ($WT = 2{,}45$) i **435** ($WT = 1{,}90$)
z numeru 3/2007

Tomasz Tkocz	– Rybnik	46,40
Krzysztof Magiera	– Łosiów	39,27
Tomasz Wietecha	– Tarnów	34,52
Jerzy Witkowski	– Radlin	29,80
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	27,98
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	21,18
Radosław Poleski	– Kołobrzeg	17,04

Po długiej przerwie witamy nowego członka Klubu 44F – p. Tomasza Tkocza.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
533 ($WT = 2{,}62$) i **534** ($WT = 1{,}55$)
z numeru 1/2007

Janusz Olszewski	– Suwałki	47,59
Tomasz Wietecha	– Tarnów	43,17
Tomasz Warszawski	– Kraków	41,41
Andrzej Daniluk	– Warszawa	40,64
Dariusz Kurpiel	– Posada Zarszyn	38,60
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	36,52
Grzegorz Karpowicz	–Wrocław	35,20

Janusz Olszewski: drugi w historii Ligi jej uczestnik, który wykonał dziewięć pełnych rund (trzykrotna norma weterańska)!

Zadania z fizyki nr 442, 443

Redaguje Jerzy B. BROJAN

442. Uporządkować poniższe układy optyczne według wartości ogniskowej:

1. dwie jednakowe soczewki płaskowypukłe zetknięte powierzchniami płaskimi,
2. dwie soczewki (takie same, jak w punkcie 1) ustawione powierzchniami płaskimi do siebie i rozsunięte na pewną (nie bardzo dużą) odległość,
3. jak w punkcie 2, z płaskorównoległą płytką szklaną wstawioną między soczewkami.

Wskazówka: Ogniskową układu optycznego (niekoniecznie cienkiej soczewki) można zdefiniować następująco: jeśli na układ pada promień światła równoległy do osi optycznej i odległy od niej o h, a po wyjściu z układu jest nachylony pod niewielkim kątem α do osi, to ogniskowa wynosi $f = h/\alpha$.

Rozwiązania oparte na gotowym wzorze na ogniskową dowolnego układu soczewek (jeśli taki wzór można znaleźć w specjalistycznych podręcznikach) nie będą akceptowane.

443. Oscylator anharmoniczny tłumiony jest ciałem poruszającym się pod wpływem dwóch sił – siły ściągającej ciało do położenia równowagi i zależnej od wychylenia (niekoniecznie proporcjonalnie) oraz siły tłumiącej, zależnej od prędkości. Zanotowano kolejne wartości amplitudy drgań takiego oscylatora, wraz z odstępami czasu (jednostki dowolne):

A	1,00	0,90	0,81	0,74	0,67	0,61	0,55	0,51	0,46	0,42	0,39	0,36	0,33	0,31	0,28	0,26	0,24
T	1,00	1,05	1,11	1,17	1,22	1,28	1,34	1,41	1,47	1,53	1,60	1,67	1,74	1,81	1,88	1,95	

Jaka zależność pierwszej siły od wychylenia i drugiej siły od prędkości jest zgodna z tą tabelą?

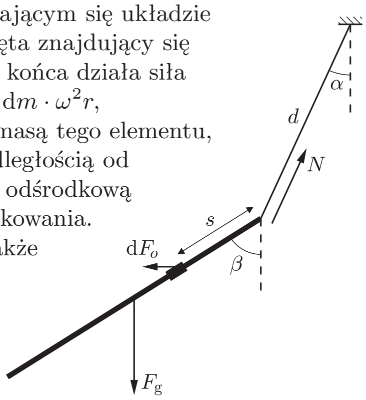
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2007

Przypominamy treść zadań:

438. Jednorodny pręt wisi na bardzo lekkiej nici, której drugi koniec jest zaczepiony w nieruchomym punkcie. Wprowadzono pręt w ruch obrotowy wokół osi pionowej przechodzącej przez ten punkt, tak że w obracającym się układzie odniesienia pozostawał nieruchomy. Czy możliwe jest, że przy pewnej prędkości kątowej obrotu załączony rysunek dokładnie przedstawia położenie pręta? (Należy zmierzyć na rysunku niezbędne wielkości)

439. W fizyce jądrowej, a także w przemyśle elektronicznym, bardzo poszukiwany jest ołów wydobyty z rud w odległej historii (np. starożytności i średniowieczu). Jakie zalety może mieć taki ołów w porównaniu z „normalnym”, tzn. pochodzącym ze współczesnego procesu wydobycia i oczyszczania?

438. Oznaczmy długość nici jako d, kąt jej odchylenia od pionu jako α, długość pręta jako l, a kąt jego odchylenia od pionu jako β. W obracającym się układzie odniesienia na element pręta znajdujący się w odległości s od górnego końca działa siła odśrodkowa równa $\mathrm{d}F_o = \mathrm{d}m \cdot \omega^2 r$, gdzie $\mathrm{d}m = (m/l)\mathrm{d}s$ jest masą tego elementu, a $r = d\sin\alpha + s\sin\beta$ – odległością od osi obrotu. Całkowitą siłę odśrodkową F_o wyznaczymy drogą całkowania. Poza nią na pręt działa także siła ciężkości $F_\mathrm{g} = mg$ oraz siła napięcia nici N (zob. rys.).



Warunek równowagi sił po wyeliminowaniu N sprowadza się do

$$F_o = m\omega^2\left(d\sin\alpha + \tfrac{1}{2}l\sin\beta\right) = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Należy jeszcze rozpatrzyć warunek równowagi ze względu na obroty. Moment siły $\mathrm{d}F_o$ względem górnego końca pręta wynosi $\mathrm{d}M_o = \mathrm{d}F_o \cdot s\cos\beta$. Otrzymany w wyniku scałkowania całkowity moment siły odśrodkowej jest równy momentowi siły ciężkości

$$M_o = m\omega^2 l\cos\beta\left(\tfrac{1}{2}d\sin\alpha + \tfrac{1}{3}l\sin\beta\right) = \tfrac{1}{2}mgl\sin\beta.$$

Z dwóch powyższych równań należy wyeliminować ω, otrzymując warunek dotyczący wielkości bezpośrednio mierzalnych na rysunku

$$\left(d\sin\alpha + \tfrac{1}{2}l\sin\beta\right)\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta = \left(\tfrac{1}{2}d\sin\alpha + \tfrac{1}{3}l\sin\beta\right)\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Według rysunku autora stosunek l/d miał wynosić około 1,4, kąt α – około 25°, a kąt β – około 58°, co oznacza niespełnienie tego warunku (przy takich wartościach l/d i β byłby spełniony dla kąta α równego 54,5°).

439. W naturalnej skale ołów występuje najczęściej razem z pewną domieszką uranu. Jednym z produktów rozpadu uranu ^{238}U jest promieniotwórczy ołów ^{210}Pb, którego śladowe ilości są obecne w świeżo oczyszczonym ołowiu. Nawet bardzo niewielkie natężenie promieniowania może zakłócać działanie układów elektronicznych lutowanych stopem ołowiu i wpływać na wyniki pomiarów, jeśli taki ołów jest wykorzystany jako osłona czułych przyrządów fizyki jądrowej. Okres połowicznego rozpadu tego izotopu wynosi 22 lata, więc ołów „stary” go nie zawiera.