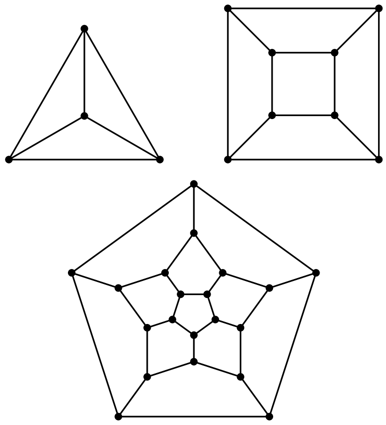
Wzór Eulera

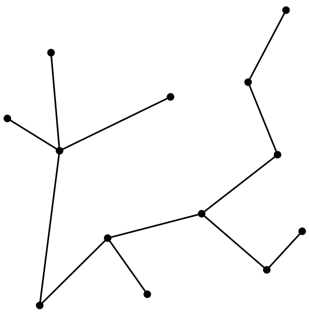
W 1752 roku Euler zapisał, że suma liczby s ścian i w wierzchołków wielościanu wypukłego jest o 2 większa od liczby k jego krawędzi. Zależność

$$s - k + w = 2$$

nosi nazwę wzoru Eulera. Uzasadnienie tego spostrzeżenia nie jest trudne. Na przykład można zrobić to, odwołując się do tzw. *diagramu Schlegela*. Jest to płaski graf odpowiadający temu, co zobaczymy zbliżywszy oko do jednej ze ścian (przezroczystego) wielościanu wypukłego tak, by wszystkie jego wierzchołki widzieć przez tę ścianę (przykłady na rysunku 1). Jeśli nieograniczony obszar, widoczny na zewnątrz tej ściany uznamy też za ścianę, to diagramowi Schlegela wielościanu będą odpowiadały te same liczby s, k, w, które odpowiadają wielościanowi. Uruchamiamy teraz procedurę: jeśli krawędź oddziela dwie różne ściany, to ją usuwamy – nietrudno zauważyć, że wyrażenie $s - k + w$ nie zmienia przy tej procedurze swej wartości (zarówno s, jak k zmniejszają się o 1). Procedura zatrzymuje się, gdy zostanie nam tylko jedna ściana, czyli gdy pozostaną tylko połączone łamane, tak jak, na przykład, na rysunku 2. Teraz usuwamy ich wolne końce wraz z prowadzącymi do nich krawędziami – to znów nie zmienia wartości wyrażenia $s - k + w$ (o 1 zmniejsza się w i k). W efekcie zostaje jeden punkt – dla niego jest $s = w = 1$ i $k = 0$, czyli $s - k + w = 2$ i tak musiało być zatem od początku.



Rys. 1. Diagramy Schlegela dla czworościanu, sześcianu i dwunastościanu foremnego.



Rys. 2.

Proste spostrzeżenie, że w wielościanie zachodzi

$$s \leqslant \frac{2}{3}k \quad \text{i} \quad w \leqslant \frac{2}{3}k, \tag{1}$$

wynika z faktu, że ściany mają co najmniej trzy boki-krawędzie, a każda krawędź należy do dwóch ścian (podobnie z wierzchołka wychodzą co najmniej trzy krawędzie i każda łączy dwa wierzchołki). Gdy zastosujemy do tego wzór Eulera, możemy otrzymać

$$s \geqslant \frac{1}{3}k + 2, \quad w \geqslant \frac{1}{3}k + 2$$

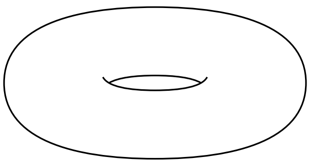
oraz

$$w \leqslant 2s - 4, \quad s \leqslant 2w - 4, \tag{2}$$

co zapewne każdy z Czytelników umie wykazać.

Od razu nasuwa się pytanie, czy dla dowolnych liczb s, k, w, spełniających wzór Eulera, istnieje wielościan mający odpowiednio tyle ścian, krawędzi i wierzchołków. Odpowiedź jest oczywiście „nie” – np. nie ma wielościanu o jednej ścianie. Ale jak brzmi odpowiedź, gdy dodatkowo założymy, że s i w to co najmniej 4, a k – co najmniej 6? Pytanie okazało się niełatwe. Dopiero w 1906 roku Steinitz udowodnił, że
jeśli liczby całkowite dodatnie s, k, w spełniają wzór Eulera i warunki (1), *to istnieje wielościan wypukły mający s ścian, k krawędzi i w wierzchołków.*

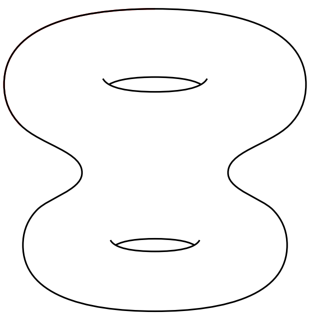
Korzystając z twierdzenia Steinitza, Czytelnicy mogą bez specjalnego trudu wykazać, że
warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich s i w istniał wielościan wypukły mający s ścian i w wierzchołków, jest (2).



Rys. 3. Czytelnik bez trudu, wykonując jakąś triangulację torusa, sprawdzi, że jego charakterystyka Eulera–Poincarégo jest równa 0.

Wzór Eulera został uogólniony przez Poincarégo na dowolne powierzchnie (i rozmaitości wyższych wymiarów). Okazuje się bowiem, że gdy dowolną powierzchnię jakoś striangulujemy (czyli podzielimy na – być może krzywoliniowe – trójkąty), to wyrażenie $s - k + w$ będzie miało tę samą wartość, niezależnie od tego, jak tę triangulację wykonamy. Liczbę tę, *charakterystykę Eulera–Poincarégo* powierzchni M, oznacza się na ogół $\chi(M)$. Nie zmienia się ona przy odkształcaniu powierzchni bez rozrywania i sklejania (czy ogólniej – przy homeomorfizmach) i na dodatek, gdy w powierzchniach M_1 i M_2 wytniemy po kółku i potem skleimy je tymi otworami, otrzymując powierzchnię M, okaże się, że

$$\chi(M) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$



Rys. 4. A jaka jest charakterystyka Eulera–Poincarégo dla precla?

Marek KORDOS