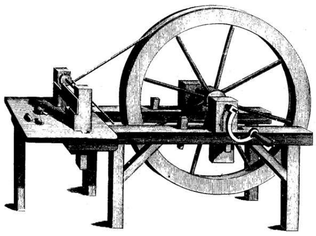
Równania Eulera–Lagrange'a

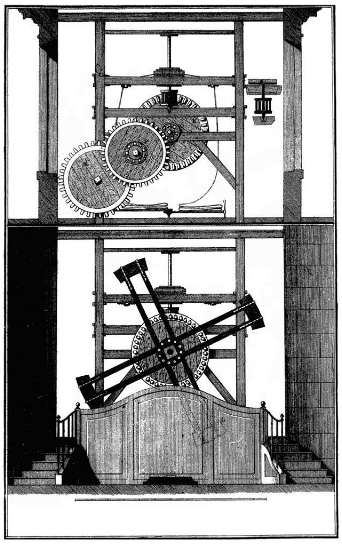


Ogólnym sformułowaniem praw ruchu układu mechanicznego, tzn. mającego skończoną liczbę stopni swobody, jest tzw. *zasada najmniejszego działania*. Dla uproszczenia podamy tę zasadę dla przypadku ruchu jednej cząstki punktowej w jednym wymiarze przestrzennym, co powinno wystarczyć do zrozumienia sedna sprawy.

Przypiszmy cząstce pewną funkcję rzeczywistą $L = L(x, \dot{x}, t)$ (gdzie t jest zmienną czasową, $x = x(t)$ oznacza położenie cząstki w chwili t, natomiast $\dot{x} := \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ jest prędkością cząstki) charakteryzującą jej ruch. Funkcja L nazywa się funkcją Lagrange'a. Zasada najmniejszego działania mówi, że ruch cząstki odbywa się w taki sposób, że tzw. *całka działania* S zdefiniowana wzorem

$$S := \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(x, \dot{x}, t) \tag{1}$$

osiąga minimum dla małej różnicy $|t_2 - t_1|$.



Podamy teraz równanie, którego rozwiązanie minimalizuje ową całkę działania. Załóżmy w tym celu, że $x = x(t)$ jest właśnie funkcją opisującą rzeczywisty ruch cząstki, dla którego całka S ma minimum. Niech $\delta x(t)$, zwana wariacją funkcji $x(t)$, oznacza mały przyrost tej funkcji w przedziale od t_1 do t_2 o własności $\delta x(t_1) = 0 = \delta x(t_2)$. Wtedy zastąpienie $x(t)$ przez $x(t) + \delta x(t)$ spowoduje zmianę działania określoną przez różnicę całek

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[L(x + \delta x, \dot{x} + \delta\dot{x}, t) - L(x, \dot{x}, t)\right]. \tag{2}$$

Przyrównanie do zera powyższej całki, czyli wariacji działania δS, jest warunkiem koniecznym na to, aby S miało minimum dla funkcji $x = x(t)$. Rozwińmy teraz wyrażenia podcałkowe w szereg potęgowy względem δx i $\delta\dot{x}$, oraz ograniczmy się do wyrazów pierwszego rzędu. Możemy więc zasadę najmniejszego działania zapisać w postaci

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ L(x, \dot{x}, t) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\right) = 0. \tag{3}$$

Całkując wyrażenie zawierające $(\partial L/\partial \dot{x})\ \delta\dot{x}$ przez części (i korzystając z tego, że $\delta\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x$), otrzymujemy

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x = 0. \tag{4}$$

Pierwszy wyraz w tym wyrażeniu znika na mocy definicji $\delta x(t)$. Drugi wyraz powinien znikać przy dowolnych wartościach wariacji δx. Będzie to możliwe wtedy, gdy wyrażenie podcałkowe spełnia warunek

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Równanie to nazywa się równaniem Eulera–Lagrange'a i zostało wyprowadzone niezależnie przez L. Eulera oraz J-L. Lagrange'a w latach 50. osiemnastego wieku. Jest ono tzw. równaniem ruchu cząstki, to znaczy jego rozwiązanie określa rzeczywisty ruch cząstki. Zadanie warunków początkowych dla tego równania, tzn. $x_1 = x(t_1)$ oraz $\dot{x}_1 = \dot{x}(t_1)$, pozwala je rozwiązać jednoznacznie.

Na przykład, dla nierelatywistycznej cząstki swobodnej o masie m poruszającej się w płaskiej czasoprzestrzeni, funkcja Lagrange'a ma prostą postać

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{6}$$

Równanie Eulera–Lagrange'a przyjmuje wtedy znaną powszechnie postać drugiego prawa Newtona:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0. \tag{7}$$

Zasada najmniejszego działania daje się łatwo uogólnić na przypadek układu wielu cząstek poruszających się w wielowymiarowej czasoprzestrzeni w zadanym polu sił. Jest ona również powszechnie stosowana w teorii pola, tzn. dla układów mających nieskończenie wiele stopni swobody. Otrzymane wtedy równania Eulera–Lagrange'a są znanymi równaniami zmian w czasie tych pól: są to np. równania Maxwella dla pola elektromagnetycznego oraz równania Einsteina dla pola grawitacyjnego. Zasada najmniejszego działania jest powszechnie stosowana w fizyce współczesnej, m.in. dla otrzymywania równań ruchu danego układu – albowiem często łatwiej jest odgadnąć funkcję Lagrange'a układu niż równania ruchu.

Ewa CZUCHRY, Włodzimierz PIECHOCKI