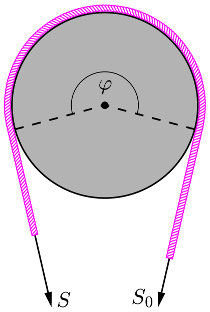
Lina Eulera

Zagadnienie liny Eulera jest stosunkowo mało znane, chociaż sam opisywany mechanizm jest powszechnie używany w różnego rodzaju układach mechanicznych, np. przekładniach, hamulcach taśmowych, czy wręcz przy cumowaniu statków.

Rozpatrzmy linę opasującą palik, jak na rysunku poniżej.



Jeśli na jeden koniec liny działa siła S, to w przypadku braku tarcia, aby ją zrównoważyć, musimy na drugi koniec podziałać taką samą siłą. W przypadku, gdy współczynnik tarcia liny o palik μ jest niezerowy i powoduje występowanie siły tarcia T, do zrównoważenia siły S potrzeba jest siła $S_0 = S - T$. Zależność tę można wyrazić też w następujący sposób:

$$S = S_0 e^{\mu\varphi},$$

gdzie φ jest kątem „opasania" liny na palik. Wzór powyższy, zwany także (jeden z wielu) wzorem Eulera, został po raz pierwszy otrzymany przez Leonharda Eulera w wyniku zsumowania małych przyczynków siły tarcia powstałych w wyniku zmiennego nacisku liny na powierzchnię palika.

Mianowicie, dla bardzo małych kątów opasania $\Delta\varphi$ siła S_0, potrzebna do skompensowania siły naciągu S, dana jest przez zależność:

$$S = S_0 + T = S_0 + \mu N,$$

gdzie N jest siłą nacisku liny na palik, dla małych kątów równą $N = \Delta\varphi S_0$. Zatem

$$S = S_0(1 + \mu\Delta\varphi).$$

Dla kąta opasania równego $2\Delta\varphi$ mamy także:

$$S_{2\Delta\varphi} = S_{\Delta\varphi}(1 + \mu\Delta\varphi) = S_0(1 + \mu\Delta\varphi)^2.$$

Jeśli mały kąt $\Delta\varphi$ jest n-tą częścią pewnego kąta φ, tzn. $n \cdot \Delta\varphi = \varphi$, wtedy

$$S_{n\Delta\varphi} = S_0(1 + \mu\Delta\varphi)^n.$$

Biorąc kąt $\Delta\varphi$ coraz mniejszy, tzn. biorąc coraz większe n, otrzymujemy w granicy $n \to \infty$:

$$S_\varphi = S_0 e^{\mu\varphi},$$

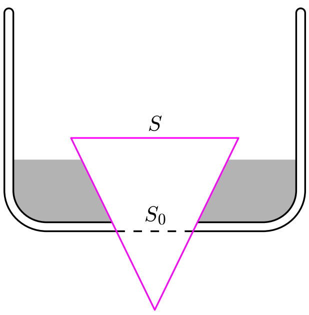
gdzie $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ jest podstawą logarytmu naturalnego, o której mowa na stronie 4. Przykładowo, dla $\mu = 0,5$ (współczynnik tarcia liny konopnej o drewno) i przy trzykrotnym opasaniu palika liną ($\varphi = 6\pi$) mamy, że stosunek siły naciągającej S do blokującej S_0 jest rzędu 10^4.

Ewa CZUCHRY

Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 697. Kolisty otwór o powierzchni S_0, wykonany w dnie akwarium, został zatkany stożkowatym korkiem o polu podstawy S (rys. 1). Dla jakiej maksymalnej gęstości korka ρ można spowodować jego wypłynięcie poprzez dolewanie wody do akwarium?
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 1

F 698. Rtęć w barometrze została zastąpiona pewną ściśliwą cieczą, której gęstość rośnie wraz z głębokością zgodnie ze wzorem $\rho = \rho_0(1 + \alpha h)$. Jaka będzie wysokość słupa takiej cieczy przy ciśnieniu atmosferycznym równym p?
Rozwiązanie na str. 3

Redaguje Waldemar POMPE

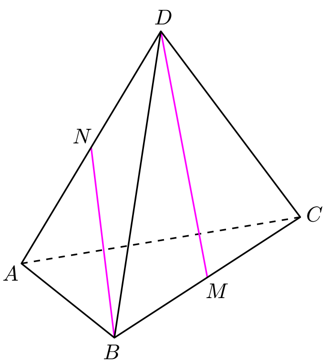
M 1077. Zbiór S składa się z 18 kolejnych liczb całkowitych. Udowodnić, że zbioru S nie da się rozbić na takie dwa rozłączne podzbiory, których iloczyny elementów są równe.
Rozwiązanie na str. 15

M 1078. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian $f(x)$ stopnia 100 o współczynnikach całkowitych o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej n każde dwa wyrazy ciągu

$$f(n),\ f(f(n)),\ f(f(f(n))), \ldots$$

są względnie pierwsze.
Rozwiązanie na str. 15

M 1079. Dany jest czworościan foremny $ABCD$ o krawędzi długości 1. Punkty M i N są odpowiednio środkami krawędzi BC i AD (rys. 2). Obliczyć odległość między prostymi BN i DM.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2