Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele – dowód Eulera

Przypuśćmy, że jedynymi liczbami pierwszymi są $p_1, p_2, \ldots, p_m$ i $m \in \mathbb{N}$. Wówczas, jak wiemy z twierdzenia o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze (którego dowód nie odwołuje się do liczebności zbioru liczb pierwszych), każdą liczbę naturalną można jednoznacznie przedstawić w postaci $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ dla pewnych liczb całkowitych nieujemnych $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Oznaczmy zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych symbolem $\mathbb{Z}_0^+$.

Zbiór $\left\{\frac{1}{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}} : k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_0^+\right\}$ jest więc zbiorem wszystkich odwrotności liczb naturalnych, przy czym każda taka odwrotność występuje w tym zbiorze tylko raz. Inaczej mówiąc,

$$\left\{\frac{1}{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}} : k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_0^+\right\} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

a stąd

$$\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_0^+} \frac{1}{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

(Wyrazy tych szeregów są dodatnie, więc kolejność sumowania nie ma znaczenia.) Szereg harmoniczny jest rozbieżny, zatem każda z powyższych sum jest nieskończona.

Skończona jest natomiast każda z sum $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{p_i})^k$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Istotnie, są to szeregi geometryczne o (dodatnim) ilorazie $\frac{1}{p_i}$ mniejszym od 1 i suma takiego szeregu jest równa $\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$. W takim razie skończony jest także iloczyn tych sum:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_1}\right)^k \cdots \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_m}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} \cdots \frac{1}{1-\frac{1}{p_m}}.$$

Iloczyn nieskończonych szeregów wygląda podobnie jak iloczyn skończonych sum: jest znowu sumą, której każdy składnik jest iloczynem, zawierającym po jednym elemencie z każdej sumy, i wszystkie takie iloczyny muszą wystąpić. W szczególności,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_1}\right)^k \cdots \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_m}\right)^k = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}_0^+} \frac{1}{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}}.$$

Założenie o skończoności zbioru liczb pierwszych doprowadziło do sprzeczności: po lewej stronie mamy liczbę skończoną, po prawej szereg rozbieżny do nieskończoności. I to jest koniec dowodu.

Wiktor BARTOL

Stała Eulera–Mascheroniego

Rozgłosu i sławy przysporzyło dwudziestoośmioletniemu Eulerowi wykazanie w 1735 roku równości

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Podobne wyniki uzyskał także dla

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

gdzie s jest dodatnią liczbą parzystą. W ogłoszonej rozprawie stwierdził ponadto, że z równości

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} - \ln(n+1) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{3} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^4} + \ldots$$

wynika zbieżność ciągu

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} - \ln(n+1)$$

przy $n \to +\infty$, a jego granicę oznaczył przez C (od takiego stwierdzenia do dowodu jest całkiem daleko, ale w XVIII w. tym się nie przejmowano). Uważał, że zasługuje ona na dokładniejsze zbadanie i wyznaczył ją z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku. Może myślał, że poznanie jej natury przybliży go do wyznaczenia, na przykład, $\zeta(3)$? Ostatecznie, dzięki wynajdywaniu coraz to nowych równości zawierających C, wiedział, że $C = 0{,}5772156649015328\ldots$. Pod koniec swego życia przyznał, że stała C pozostała dla niego zagadką. Pałeczkę wyznaczania kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego C przejął włoski matematyk Lorenzo Mascheroni. Zastosowane przez niego w 1790 roku oznaczenie γ zamiast C pozostało do dziś. Do dziś też nie umiemy odpowiedzieć na pytanie, czy γ jest liczbą wymierną.

Marcin HAUZER