Euler i teoria liczb

Nie sposób przedstawić w krótkim artykule pełnej listy zasług Eulera na polu teorii liczb. Dokonałem więc wyboru najbardziej charakterystycznych przykładów jego osiągnięć w tej dziedzinie.

Za jedno z najważniejszych twierdzeń teorii liczb uważane jest prawo wzajemności reszt kwadratowych. Zostało ono sformułowane bez dowodu przez Eulera, a udowodnione przez Gaussa.

Liczbę r nazywamy resztą kwadratową modulo p, jeżeli kongruencja

$$x^2 \equiv r \pmod p$$

ma rozwiązanie całkowite x. Prawo wzajemności reszt kwadratowych orzeka, że dla dowolnych różnych nieparzystych liczb pierwszych p i q wszystkie trzy warunki:

(i) liczba p jest resztą kwadratową modulo q,

(ii) liczba q jest resztą kwadratową modulo p,

(iii) obie liczby p, q przy dzieleniu przez 4 dają resztę 3

są fałszywe lub też prawdziwe są dokładnie dwa z nich.

Euler udowodnił, że szereg odwrotności liczb pierwszych jest rozbieżny. Przy okazji odkrył następujący związek między funkcją ζ Riemanna i liczbami pierwszymi

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \,,$$

gdzie mnożenie rozciąga się na wszystkie liczby pierwsze p. Powyższa równość jest spełniona dla dowolnej liczby zespolonej s o części rzeczywistej większej od 1.

Euler wyjaśnił też kwestię kilku zagadnień pochodzących od Fermata, który miał zwyczaj formułowania twierdzeń bez dowodu.

Jedno z takich twierdzeń, znane jako małe twierdzenie Fermata, orzeka, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz dowolnej liczby całkowitej a liczba $a^p - a$ jest podzielna przez p.

W innej wersji

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p \,,$$

o ile liczba a jest względnie pierwsza z p. Euler nie tylko jako pierwszy opublikował dowód tego twierdzenia, ale uogólnił je na przypadek dowolnej, niekoniecznie pierwszej, liczby naturalnej $k > 1$. Mamy bowiem

$$a^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod k \,,$$

gdzie φ jest funkcją Eulera. Z definicji $\varphi(k)$ jest liczbą liczb całkowitych dodatnich względnie pierwszych z k i mniejszych od k. Powyższe uogólnienie znane jest jako twierdzenie Eulera.

Fermat był przekonany, że liczby postaci

$$2^{2^n} + 1$$

są pierwsze dla wszystkich liczb całkowitych nieujemnych n. Przypuszczenie to zostało obalone przez Eulera, który wykazał, że

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417 \,.$$

Euler udowodnił wielkie twierdzenie Fermata dla wykładnika 3, które w tym przypadku mówi, że równanie

$$x^3 + y^3 = z^3$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

Sformułował też hipotezę będącą uogólnieniem powyższego twierdzenia. Przypuszczał, że dla dowolnego $n > 2$ nie można przedstawić n-tej potęgi liczby naturalnej w postaci sumy mniej niż n potęg o wykładniku n.

Tak więc według hipotezy Eulera równanie

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = z^n$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ z$, jeżeli $n > 2$ oraz $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Hipoteza ta okazała się jednak fałszywa, ale została obalona dopiero w roku 1967 przykładem

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

znalezionym przez Landera i Parkina. W 1988 roku Noam Elkies wykazał, że hipoteza Eulera jest także fałszywa dla $n = 4$. Jednak do tej pory nie została ona rozstrzygnięta dla żadnej liczby $n > 5$.

Od Eulera pochodzi równość

$$158^4 + 59^4 = 134^4 + 133^4$$

oraz rozwiązanie parametryczne równania diofantycznego $x^4 + y^4 = z^4 + t^4$.

Od Eulera pochodzi także wielomian

$$x^2 + x + 41$$

dający 40 różnych liczb pierwszych dla 40 kolejnych argumentów $x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, 39$. Mimo intensywnego użycia komputerów do dnia dzisiejszego nie znaleziono wielomianu stopnia 2, który dawałby więcej niż 40 różnych liczb pierwszych dla kolejnych wartości argumentu.

Jarosław WRÓBLEWSKI