

Euler i obroty Ziemi



Bezwładność w ruchu obrotowym opisuje tzw. tensor momentu bezwładności I , czyli symetryczna, kwadratowa macierz o rozmiarze 3. Jest to sześć niezależnych liczb, ale dla każdego ciała istnieje ortogonalny układ współrzędnych, w którym tylko wyrazy na pozycjach 1,1, 2,2 i 3,3 nie są równe 0. Trzy osie takiego układu nazywamy osiami głównymi, a trzy nieznikające składowe tensora I – głównymi momentami bezwładności. Dla jednorodnej elipsoidy obrotowej, którą przybliżamy kształt Ziemi, trzy osie główne wyznacza oś symetrii elipsoidy i dowolne dwie osie prostopadłe do niej i do siebie nawzajem.

Równania Eulera bryły sztywnej, której dwa momenty bezwładności są równe, mają postać

$$\begin{cases} I_z \dot{\omega}_z = 0, \\ I_{\perp} \dot{\omega}_x = \omega_z (I_{\perp} - I_z), \\ I_{\perp} \dot{\omega}_y = \omega_z (I_z - I_{\perp}). \end{cases}$$

Zauważmy, że pierwsze równanie daje się rozwiązać bez pomocy pozostałych dwóch. Oznacza ono, że składowa prędkości kątowej Ziemi wzdłuż osi z jest stała w czasie. Czytelnicy obeznani z równaniami różniczkowymi występującymi w mechanice rozpoznają zapewne pozostałe dwa równania. Opisują one ruch kołowy z prędkością kątową, $\omega_p = \omega_z (1 - \frac{I_z}{I_{\perp}})$, niezależną od promienia koła. Innymi słowy, wektor chwilowej prędkości kątowej zakreśla stożek o dowolnym kącie rozwarcia i w stałych jednostkach czasu. Okres tego ruchu, tzw. precesji swobodnej, obliczamy, przyjmując, że ω_z odpowiada obrotowi Ziemi o okresie jednej doby. Za Eulerem otrzymujemy

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = 1 \text{ doba} \cdot \frac{I_{\perp}}{I_z - I_{\perp}} = 1 \text{ doba} \cdot \frac{R_r^2 + R_b^2}{R_r^2 - R_b^2} \approx 300 \text{ dni}.$$

Obserwacyjnego potwierdzenia rachunków Eulera dokonał amerykański astronom Seth Carlo Chandler w 1891 roku. Kąt rozwarcia stożka zakreślanego

Leonhard Euler, jak większość wybitnych matematyków swoich czasów (d'Alembert, Lagrange, Laplace), zajmował się także fizyką, a zwłaszcza dziedziną, która w XVIII stuleciu rozwijała się wyjątkowo szybko – mechaniką. Jego nazwisko nosi sposób opisu chwilowego położenia bryły sztywnej (tzw. kąty Eulera) oraz układ równań różniczkowych opisujących jej ruch rotacyjny. Przyjrzyjmy się tym równaniom.

Przypuśćmy, że na bryłę sztywną nie działa chwilowo żaden moment siły. Ruch w tej sytuacji wyznacza zasada zachowania momentu pędu, którą w układzie inercjalnym możemy zapisać jako

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = 0.$$

Równanie to prościej rozważać w układzie związanym sztywno z bryłą, gdy osie układu współrzędnych zgodne są z jej osiami głównymi. Po rozpisaniu na współrzędne przyjmuje ono postać

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x = (I_y - I_z) \omega_y \omega_z, \\ I_y \dot{\omega}_y = (I_z - I_x) \omega_x \omega_z, \\ I_z \dot{\omega}_z = (I_x - I_y) \omega_x \omega_y, \end{cases}$$

gdzie I_x , I_y i I_z to główne momenty bezwładności.

Gdybyśmy przyjęli, że Ziemia jest sztywną, jednorodną kulą, a więc ciałem o jednakowych trzech momentach głównych bezwładności, jej ruch byłby jednostajnym obrotem wokół ustalonej osi. Jednak francuska wyprawa pomiarowa pod przewodnictwem Pierre'a Louisa de Maupertuisa w latach 1736–37 stwierdziła, że Ziemia jest spłaszczone na biegunach, a wybrzuszone na równiku, a więc jej równikowy promień ($R_r = 6378$ km) jest dłuższy od biegunowego ($R_b = 6357$ km). Powodem odkształcenia jest oczywiście ruch obrotowy Ziemi. Za Eulerem zastanowimy się, jaki ma to wpływ na obrót naszej planety.

Czytelnik biegły w rachunku całkowym może sprawdzić, że przy założeniu jednorodności moment bezwładności Ziemi wzdłuż osi spłaszczenia, $I_z = \frac{2}{5}MR_r^2$, jest większy od momentu liczonego wzdłuż którejkolwiek z osi do niej prostopadłych, $I_{\perp} = \frac{1}{5}M(R_r^2 + R_b^2)$ (M to masa Ziemi).

w przestrzeni przez wektor $\vec{\omega}$ okazał się bardzo mały: promień drogi bieguna, czyli punktu przecięcia chwilowej osi obrotu i powierzchni Ziemi, to raptem kilkanaście metrów. Zaskoczeniem było odkrycie, że faktyczny ruch osi obrotu jest raczej nieregularny, a jego okres to ponad 430 dni. Niezgodność okresu zaobserwowanego przez Chandlera i rachunków można wytłumaczyć stosunkowo prosto: Ziemia nie jest jednolitą bryłą sztywną, jej wewnętrzne warstwy są płynne i prawdopodobnie nie uczestniczą w precesji warstw zewnętrznych. Większym problemem są nieregularności. Wydaje się, że odpowiedzialne mogą tu być procesy na powierzchni Ziemi (pływy, zmiany zasolenia wód i prądy oceaniczne) i pod jej powierzchnią (przemieszczenia mas).

Należy podkreślić, że opisany efekt nie ma nic wspólnego z precesją astronomiczną, czyli powolnym obrotem osi Ziemi powodowanym przez oddziaływanie z Księżycem i Słońcem. Obszerniej o wszystkich subtelnościach ruchu obrotowego Ziemi i ich przyczynie można przeczytać w artykule Jolanty Nastuli w *Delcie* 12/2006.

Mikołaj KORZYŃSKI