

Wykorzystana w dowodzie metoda tzw. funkcji tworzących odegrała w następnych wiekach ogromną rolę w kombinatoryce.

Czytelnikowi władającemu funkcjami tworzącymi wyrażonymi w postaci nieskończonych sum, iloczynów i iloczynów sum nieskończonych z biegłością mniejszą niż Euler, należy się na zakończenie chociaż szkic dowodu elementarnego. Otóż każdemu podziałowi liczby n na liczby nieparzyste

$$n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$$

przyporządkujemy podział na liczby parami różne. Przypuśćmy, że liczba k_1 występuje w tym podziale l_1 razy. Liczbę l_1 zapiszemy w postaci sumy potęg dwójki (czyli w systemie dwójkowym): $l_1 = 2^{p_1} + 2^{p_2} + \dots$. Następnie zamiast l_1 składników k_1 zapiszemy składniki $k_1 \cdot 2^{p_1}, k_1 \cdot 2^{p_2}, \dots$. W podobny sposób potraktujemy pozostałe składniki nieparzyste podziału liczby n . Popatrzmy na przykład:

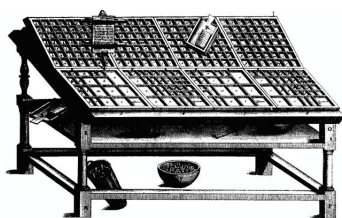
$$69 = 7 + 7 + 7 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1.$$

Ten podział zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned} 69 &= 7 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = \\ &= 7 \cdot (2^1 + 2^0) + 5(2^2 + 2^1) + 3 \cdot (2^2 + 2^0) + 1 \cdot (2^1 + 2^0) = \\ &= 7 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = \\ &= 14 + 7 + 20 + 10 + 12 + 3 + 2 + 1 = \\ &= 20 + 14 + 12 + 10 + 7 + 3 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Nietrudno udowodnić, że w ten sposób otrzymujemy wszystkie podziały na liczby parami różne oraz różnym podziałom na liczby nieparzyste odpowiadają różne podziały na liczby niepowtarzające się. Wynika to stąd, że każdą liczbę naturalną $m \geq 1$ można w jednoznaczny sposób przedstawić w postaci $m = 2^p \cdot q$, gdzie liczba q jest nieparzysta. Szczegóły dowodu pozostawimy Czytelnikowi.

Wojciech GUZICKI



Euler i nieporządek

Nieporządek to takie ustawienie (permutacja) liczb od 1 do n , w którym żadna liczba nie stoi na właściwym miejscu (tzn. jedynka nie stoi na pierwszym miejscu, dwójka na drugim, trójka na trzecim itd.). Na przykład, permutacja 34152 jest nieporządkiem liczb od 1 do 5, a permutacja 51243 nie jest nieporządkiem (czwórka stoi na czwartym miejscu). Euler znalazł wzór rekurencyjny, z którego można łatwo obliczyć liczby nieporządków dla kolejnych n . Oznaczmy liczbę nieporządków liczb od 1 do n symbolem D_n . Euler udowodnił, że wtedy

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_n = (n-1) \cdot (D_{n-1} + D_{n-2}) \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Stąd możemy łatwo obliczyć, że np.

$$D_3 = 2, \quad D_4 = 9, \quad D_5 = 44, \quad D_6 = 265, \quad \dots, \quad D_{12} = 176214841.$$

Z tego wzoru rekurencyjnego Euler wyprowadził inny, prostszy wzór:

$$D_1 = 0, \quad D_n = n \cdot D_{n-1} + (-1)^n \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Wreszcie wyprowadził wzór ogólny:

$$D_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right).$$

Wojciech GUZICKI



Rozwiązanie zadania F 698.

Ciśnienie zewnętrzne będzie równe ciśnieniu słupa cieczy, wyrażającym się przez jej średnią gęstość:

$$p = \rho_{\text{sr}} g h = \rho_0 \left(1 + \frac{\alpha h}{2} \right) g h. \quad \text{Stąd } h = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{2p\alpha}{\rho_0 g}} - 1 \right).$$