Euler i liczba e

Z szacunku dla Eulera w tym artykule używać będę tak jak on notacji $\sqrt{-1}$. Jako ciekawostkę podam, że literą i oznaczał on „wielkość nieskończenie dużą”, tak więc pierwsza z równości (1) wyglądała w książce [1] tak: $e = (1 + 1/i)^i$.

Literatura

[1] Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, 1748

[2] Leonhard Euler, *De fractionibus continuis*, Comment. Acad. Sc. Petrop. 9 (1737)

[3] Eli Maor, *e: The story of a Number*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994

Liczba e, podstawa logarytmów naturalnych, występowała w matematyce na sto co najmniej lat przed publikacją Eulera [1]. W tej fundamentalnej monografii (obok wielu innych tematów) wiele miejsca poświęcił Euler liczbie e i jej licznym zastosowaniom. Euler wiedział, że

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \tag{1}$$

oraz że $\left(e^x\right)' = e^x$. To właśnie spowodowało, że podstawowe znaczenie przypisał logarytmom naturalnym (czyli o podstawie e) oraz funkcji wykładniczej e^x. Żeby podkreślić wagę tej liczby, Euler nadał jej specjalną, do dziś stosowaną nazwę, właśnie e. Oczywiście, dla dowolnego rzeczywistego x mamy

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \tag{2}$$

Należy pamiętać, że Euler nie znał współczesnej ścisłości analizy matematycznej i aparatu δ–ε, genialnie natomiast operował formułami. Niezbyt przejmując się istnieniem $\sqrt{-1}$, wstawił $x\sqrt{-1}$ w (2) i wyszło mu

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\cdot\sin x. \tag{3}$$

Stąd już tylko krok do sławnej formuły

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1. \tag{4}$$

Innym cenionym obecnie wynikiem Eulera o liczbie e jest jej niewymierność. Wydaje mi się jednak, że Eulera niezbyt ten fakt interesował; w pierwszym tomie [1], gdzie jest on udowodniony, nie jest on jasno sformułowany. To, co Eulera bardzo interesowało, to przybliżone rozwiązania równań czy też efektywne wyliczanie przybliżeń konkretnych liczb, między innymi liczby e. W tym celu w Rozdziale XVIII [1] przedstawił teorię ułamków łańcuchowych i podał oszacowania błędów, jakie popełniamy, urywając ułamek łańcuchowy w pewnym miejscu.

Euler zauważył, że naturalny schemat wyliczania wartości ułamka łańcuchowego prowadzi do szeregu naprzemiennego, oraz odwrotnie – sumę szeregu naprzemiennego można przedstawić jako ułamek łańcuchowy. Ponieważ z (2) mamy

$$\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$$

więc stosując swoją metodę Euler otrzymał

$$\frac{e-1}{e} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\ldots}}}}}. \tag{5}$$

Sam Euler uznał za najważniejsze ułamki łańcuchowe postaci

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ldots}}}}, \tag{6}$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots$ to liczby naturalne $\geqslant 1$. Podał on sposób rozkładu dowolnej dodatniej liczby wymiernej na ułamek skończony postaci (6). Dla liczby e udowodnił w [2] i powtórzył w [1] rozkład

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ldots}}}}. \tag{7}$$

Niestety pracy [2] nie czytałem, a w [1] Euler wylicza tę równość do sześciu kresek ułamkowych z wartości e podanej z dokładnością do 12 miejsc dziesiętnych. O nieskończonym rozwinięciu pisze, że „uzasadnić je można za pomocą rachunku nieskończonych”.

Podkreślić należy, że liczby tutaj występujące (poza pierwszą) tworzą nieskończony postęp arytmetyczny. Jeśli uwzględnimy łatwą do udowodnienia jedyność rozkładu liczby dodatniej na ułamek łańcuchowy postaci (6), od razu zauważymy, że liczba e musi być niewymierna.

Standardowy obecnie dowód niewymierności liczby e, używający szeregu (1), został najprawdopodobniej podany przez J. Fouriera, a więc jest o około sto lat późniejszy od naszkicowanego wyżej. Jest on następujący. Niech $e = p/q$, gdzie p i q są liczbami naturalnymi. Mnożąc (1) przez $q!$, otrzymamy

$$p(q-1)! = \left(\sum_{n=0}^{q}\frac{q!}{n!}\right) + \frac{1}{q+1} + \\ + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots,$$

gdzie jasne jest, że lewa strona oraz wartość w nawiasie po prawej są liczbami naturalnymi. To, co pozostało po prawej stronie, jest więc też liczbą naturalną dodatnią i mniejszą od

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q+1}\right)^k = \frac{1}{q} \leqslant 1.$$

Otrzymaliśmy więc jawną sprzeczność.

Ponadto polecam książkę Eli Maora [3].

Przemysław WOJTASZCZYK