Euler i kombinatoryka

Nazwisko Eulera występuje wielokrotnie w każdym podręczniku kombinatoryki. Z ogromnej liczby poruszanych przez niego problemów przytoczymy jeden: problem zliczania podziałów liczby. Podziałem liczby n nazywamy przedstawienie jej w postaci sumy liczb naturalnych. Na przykład, liczba 6 ma 11 podziałów (zauważmy, że kolejność składników nie jest istotna):

$$6,\ 5+1,\ 4+2,\ 4+1+1,\ 3+3,\ 3+2+1,\ 3+1+1+1,\ 2+2+2,$$
$$2+2+1+1,\ 2+1+1+1+1,\ 1+1+1+1+1+1.$$

Zauważmy, że wśród tych 11 podziałów istnieją cztery podziały na liczby nieparzyste:

$$5+1,\ 3+3,\ 3+1+1+1,\ 1+1+1+1+1+1$$

i cztery podziały na liczby niepowtarzające się:

$$6,\ 5+1,\ 4+2,\ 3+2+1.$$

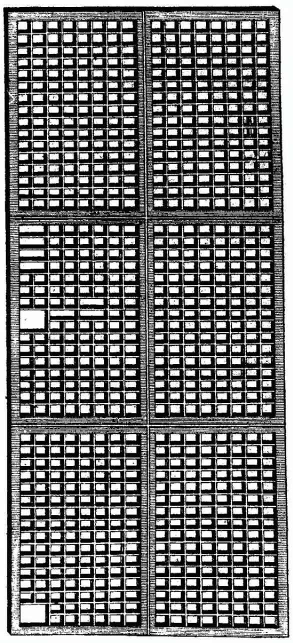
Euler zauważył, że nie jest to przypadek. Okazuje się, że dla każdej liczby naturalnej liczba podziałów na składniki nieparzyste jest równa liczbie podziałów na składniki parami różne (niepowtarzające się). W dowodzie Euler skorzystał z nieskończonych sum i iloczynów. Zauważył, że jeśli iloczyn

$$Q=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\cdot\ldots$$

zostanie przedstawiony w postaci szeregu

$$Q=1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+\ldots,$$

to współczynnik stojący przy x^n jest właśnie liczbą podziałów n na składniki parami różne. Po chwili zastanowienia możemy bowiem dostrzec, że np. x^6 powstaje na cztery sposoby: iloczyn samych jedynek i x^6 z szóstego czynnika; iloczyn jedynek z wyjątkiem x z pierwszego czynnika i x^5 z piątego; iloczyn jedynek, x^2 z drugiego czynnika i x^4 z czwartego; wreszcie iloczyn jedynek, x z pierwszego czynnika, x^2 z drugiego i x^3 z trzeciego. Następnie Euler wziął drugi iloczyn:



$$R=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\ldots$$

i, korzystając ze wzoru

$$\frac{1}{1-a}=1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+\ldots,$$

przedstawił go w postaci

$$R=(1+x+x^2+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)\cdot\ldots$$

Zauważmy, że mamy tu do czynienia z nieskończonym iloczynem szeregów nieskończonych. Ten ostatni iloczyn Euler przepisał w postaci:

$$R=(1+x+x^{1+1}+\ldots)(1+x^3+x^{3+3}+\ldots)(1+x^5+x^{5+5}+\ldots)\cdot\ldots$$

Po „wymnożeniu” i redukcji wyrazów podobnych otrzymał

$$R=1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+\ldots,$$

czyli ten sam szereg, co w przypadku Q. To oczywiście wymagało dowodu. Najpierw jednak zastanówmy się, tak jak w przypadku Q, skąd wzięły się współczynniki przy kolejnych potęgach x. Rozumując podobnie jak poprzednio, przekonamy się, że potęgi x powstają przez mnożenie jedynek i potęg o wykładnikach nieparzystych. Stąd wynika, że współczynnik przy x^n jest równy liczbie podziałów n na składniki nieparzyste. Teraz do dokończenia dowodu wystarczyło udowodnić równość $Q=R$. Euler zdefiniował trzeci iloczyn

$$P=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\cdot\ldots$$

i zauważył, że

$$PQ=(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\cdot\ldots$$

Ponieważ wszystkie czynniki iloczynu PQ występują w iloczynie P, więc

$$\frac{1}{Q}=\frac{P}{PQ}=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdot\ldots=\frac{1}{R},$$

czyli $Q=R$.

Wykorzystana w dowodzie metoda tzw. funkcji tworzących odegrała w następnych wiekach ogromną rolę w kombinatoryce.

Czytelnikowi władającemu funkcjami tworzącymi wyrażonymi w postaci nieskończonych sum, iloczynów i iloczynów sum nieskończonych z biegłością mniejszą niż Euler, należy się na zakończenie chociaż szkic dowodu elementarnego. Otóż każdemu podziałowi liczby n na liczby nieparzyste

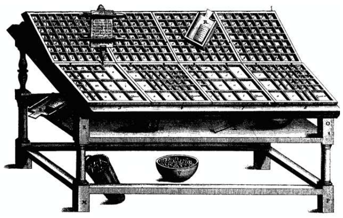
$$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$$

przyporządkujemy podział na liczby parami różne. Przypuśćmy, że liczba k_1 występuje w tym podziale l_1 razy. Liczbę l_1 zapiszemy w postaci sumy potęg dwójki (czyli w systemie dwójkowym): $l_1 = 2^{p_1} + 2^{p_2} + \ldots$. Następnie zamiast l_1 składników k_1 zapiszemy składniki $k_1 \cdot 2^{p_1}, k_1 \cdot 2^{p_2}, \ldots$. W podobny sposób potraktujemy pozostałe składniki nieparzyste podziału liczby n. Popatrzmy na przykład:

$$69 = 7+7+7+5+5+5+5+5+5+3+3+3+3+3+1+1+1.$$

Ten podział zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned}69 &= 7\cdot 3 + 5\cdot 6 + 3\cdot 5 + 1\cdot 3 = \\ &= 7\cdot(2^1+2^0) + 5(2^2+2^1) + 3\cdot(2^2+2^0) + 1\cdot(2^1+2^0) = \\ &= 7\cdot 2 + 7\cdot 1 + 5\cdot 4 + 5\cdot 2 + 3\cdot 4 + 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 = \\ &= 14+7+20+10+12+3+2+1 = \\ &= 20+14+12+10+7+3+2+1.\end{aligned}$$



Nietrudno udowodnić, że w ten sposób otrzymujemy wszystkie podziały na liczby parami różne oraz różnym podziałom na liczby nieparzyste odpowiadają różne podziały na liczby niepowtarzające się. Wynika to stąd, że każdą liczbę naturalną $m \geqslant 1$ można w jednoznaczny sposób przedstawić w postaci $m = 2^p \cdot q$, gdzie liczba q jest nieparzysta. Szczegóły dowodu pozostawimy Czytelnikowi.

Wojciech GUZICKI

Euler i nieporządek

Nieporządek to takie ustawienie (permutacja) liczb od 1 do n, w którym żadna liczba nie stoi na właściwym miejscu (tzn. jedynka nie stoi na pierwszym miejscu, dwójka na drugim, trójka na trzecim itd.). Na przykład, permutacja 34152 jest nieporządkiem liczb od 1 do 5, a permutacja 51243 nie jest nieporządkiem (czwórka stoi na czwartym miejscu). Euler znalazł wzór rekurencyjny, z którego można łatwo obliczyć liczby nieporządków dla kolejnych n. Oznaczmy liczbę nieporządków liczb od 1 do n symbolem D_n. Euler udowodnił, że wtedy

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_n = (n-1)\cdot(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad \text{dla } n \geqslant 3.$$

Stąd możemy łatwo obliczyć, że np.

$$D_3 = 2, \quad D_4 = 9, \quad D_5 = 44, \quad D_6 = 265, \quad \ldots, \quad D_{12} = 176214841.$$

Z tego wzoru rekurencyjnego Euler wyprowadził inny, prostszy wzór:

$$D_1 = 0, \quad D_n = n\cdot D_{n-1} + (-1)^n \quad \text{dla } n \geqslant 2.$$

Wreszcie wyprowadził wzór ogólny:

$$D_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Wojciech GUZICKI

Rozwiązanie zadania F 698.
Ciśnienie zewnętrzne będzie równe ciśnieniu słupa cieczy, wyrażającym się przez jej średnią gęstość: $p = \rho_{\text{śr}} g h = \rho_0 \left(1 + \frac{\alpha h}{2}\right) g h$. Stąd $h = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{1 + \frac{2p\alpha}{\rho_0 g}} - 1\right)$.