Ciąg Eulera–Jaczewskiego

Czym zasłużył się Leonhard Euler w algebrze? Wieloma odkryciami, ale przede wszystkim napisaniem dzieła *Vollständige Anleitung zur Algebra* wydanego przez Petersburską Akademię Nauk w 1770 r. Uważa się, że jest to druga, po *Elementach* Euklidesa, książka matematyczna o największej liczbie wydrukowanych egzemplarzy.

Książka była pisana, gdy nie zostały jeszcze odkryte grupy, pierścienie, ideały, ciała, przestrzenie liniowe, topologia i geometria algebraiczna, algebry uniwersalne, algebry Boole'a – słowem, kiedy algebra nie zawojowała jeszcze naszego świata matematycznego, a matematyka nie była wcale algebraicznym mocarstwem.

Euler podaje zadania i je rozwiązuje. To ciekawy sposób nauczania. Ujmuje to skomplikowanie brzmiąca maksyma: *Tego, czego powinniśmy się nauczyć, by coś robić, uczymy się, robiąc to właśnie.*

Niektóre z tych zadań zakwalifikowalibyśmy dziś do matematyki rekreacyjnej, inne są zadaniami tekstowymi, dobrymi i dla dzisiejszej szkoły. Wiele z nich Euler przepisał z pierwszej niemieckiej książki o algebrze (1553). Oto przykłady.

Trzech kupców nabyło na spółkę dom za 100 talarów reńskich. Gdyby pierwszy z nich pożyczył od drugiego połowę jego pieniędzy, to mógłby dom kupić samodzielnie. Gdyby drugi kupiec pożyczył od trzeciego jedną trzecią jego pieniędzy, także mógłby kupić dom samodzielnie. To samo mógłby zrobić trzeci kupiec, pożyczywszy od pierwszego ćwierć jego pieniędzy. Ile pieniędzy miał każdy z nich?

Pewien bogaty szlachcic podzielił w testamencie sztuki złota między swoje dzieci w następujący sposób. Dziecko o numerze i otrzymało $a \cdot i$ sztabek, plus n-tą część pozostałej liczby sztuk złota. Okazało się, że wszystkie dzieci otrzymały po równo – tyle samo złota. Ile było dzieci i ile sztuk złota miał szlachcic? Uwaga: n nie jest liczbą dzieci, tylko pewną liczbą naturalną.

Zadanie to jest stare, rozwiązywał je już Cardano. Rozwiązań jest wiele. Czytelnik z XXI wieku będzie miał wiele uciechy, szukając kolejnych.

Ale nie tylko takie ciekawostki wypełniają *Wprowadzenie do Algebry*. Wiele miejsca poświęca Euler równaniu $y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3$ i jego rozwiązaniom wymiernym. W języku dzisiejszej geometrii algebraicznej powiedzielibyśmy, że bada krzywe eliptyczne i punkty wymierne na nich – to klasyczne zagadnienie odegrało zasadniczą rolę w dowodzie Wilesa Wielkiego Twierdzenia Fermata. A słynne już wtedy zadanie Fermata Euler próbuje rozwiązać i oczywiście nie osiąga celu. Uzasadnia nawet, jak może, „dlaczego" rozwiązać się nie daje. Przy końcu książki pisze mniej więcej tak, proroczo: „widocznie do tego równania potrzebne są specjalne metody, które nie zostały jeszcze wynalezione. Dla równania $x^3 + y^3 = z^3$ udało mi się znaleźć metodę".

Owa metoda to idea „nieskończonego zejścia", znana właściwie już Fermatowi. Zakładamy, że rozwiązanie istnieje i wykazujemy, że musi istnieć następne, z mniejszymi liczbami. I tak dalej,…, ale nieskończonego ciągu malejących liczb naturalnych nie ma. Jeżeli konstruujemy taki ciąg, to… musi gdzieś tkwić fałsz. Euler tłumaczy to dość długo i zawile – widocznie metoda była zbyt świeża.

Wspomnijmy tu chyba jedyny polski akcent, związany z Eulerem: *ciąg Eulera–Jaczewskiego.*

Wielomian jednorodny f kilku zmiennych jest proporcjonalny do sumy swoich pochodnych cząstkowych mnożonych przez zmienne. Na przykład dla $f(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$ mamy

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} &= x \cdot (2xyz + y^2z + yz^2) + \\ &+ y \cdot (x^2z + 2xyz + xz^2) + \\ &+ z \cdot (x^2y + xy^2 + 2xyz) = \\ &= 4 \cdot (x^2yz + xy^2z + xyz^2) = 4f. \end{aligned}$$

Ta nietrudna zależność nosi nazwę tożsamości Eulera. Przeskoczmy 250 lat. We współczesnej geometrii algebraicznej ciągiem Eulera nazywa się taki oto dokładny ciąg wiązek wektorowych na przestrzeni rzutowej wymiaru $n : 0 \to O \to \bigoplus_{i=1}^{n} O(1) \to T \to 0.$

Pierwsza z wiązek, O, to wiązka trywialna, potem następuje suma prosta wiązek liniowych odpowiadających hiperpłaszczyznom, wreszcie T to wiązka styczna. Odwzorowanie $\bigoplus_{i=1}^{n} O(1) \to T$ jest generowane przez różniczkowania $\frac{\partial}{\partial x_i}$, zaś zanurzenie $O \to \bigoplus_{i=1}^{n} O(1)$ jest opisane lokalnie jako

$$f \to \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

a ta ostatnia funkcja jest proporcjonalna do f na mocy właśnie relacji Eulera.

Czy wyjaśniłem, o co chodzi? Oczywiście, że… nie wszystkim. I nie będę się starał.

Mój były student, a potem kolega z pracy, młodo zmarły Krzysztof Jaczewski (1955–1994), wykazał, (znów nie będę tłumaczyć!), że istnienie uogólnionego ciągu Eulera charakteryzuje *rozmaitości toryczne*, teoria których interesująco łączy zaawansowaną geometrię algebraiczną z prostą geometrią wielościanów. Jeszcze dziesięć lat temu były to szalenie modne zagadnienia. A wspomniany ogólniejszy ciąg nazywa się dziś w literaturze matematycznej ciągiem Eulera–Jaczewskiego. I taki to jest „polski akcent" związany z Leonhardem Eulerem; może wybaczymy temu wybitnemu uczonemu, że przyjął gościnny chleb na dworze carycy Katarzyny, sprawczyni rozbiorów Polski.

Michał SZUREK