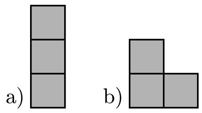
mała delta

Wakacyjne łamigłówki

Do wakacyjnych rekreacji można dołączyć rozwiązywanie łamigłówek. Tutaj proponujemy dwie: A i B. Każda z nich ma dwie części. Pierwsze części, polegające na znalezieniu jakiegoś konkretnego rozwiązania, są łatwiejsze i można je zaproponować nawet nieufnie do matematyki nastawionym znajomym. Drugie części natomiast, choć wydają się tylko drobną modyfikacją części pierwszych, wymagają użycia matematycznych narzędzi. Może to dobra okazja, by porozmawiać o matematyce z osobami, które nie są jej zbyt przychylne?

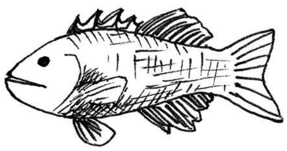


Rys. 1. a) tromino proste, b) L-tromino.

Tromino to figura powstała przez sklejenie trzech kwadratów jednostkowych wzdłuż pewnych boków. Jak łatwo się zorientować, są dwa rodzaje tromin (rys. 1). Tromina to bliscy krewni znanego domina, tetramina (w *Tetris* grał chyba każdy) i pentamina, czyli figur sklejonych odpowiednio z dwóch, czterech i pięciu kwadratów. Pojedynczy kwadrat to *monomino*. 21 płytek tromina i jedno monomino składają się razem z 64 kwadratów. Można więc pomyśleć o zakryciu nimi szachownicy 8×8. O tym mówi

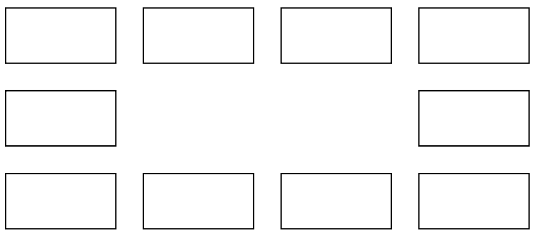
Łamigłówka *A*. **Część I**: Na dowolnie obranym polu szachownicy leży monomino. Jak przykryć pozostałe pola L-trominami? Czy zawsze da się to zrobić?

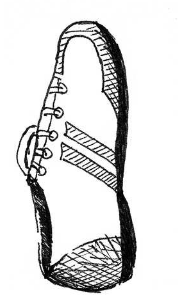
Część II: A czy można zrobić to samo za pomocą tromin prostych? Gdzie musi leżeć monomino, by to się udało?



A teraz zupełnie inna

Łamigłówka *B*. **Część I**: Jak wpisać w poniższy diagram

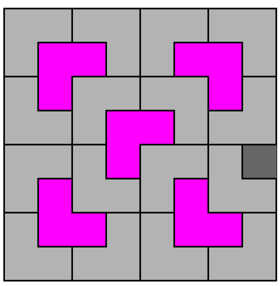


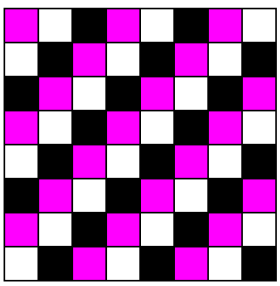


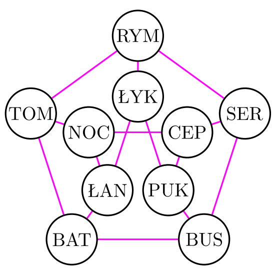
słowa BAT, BUS, CEP, ŁAN, ŁYK, NOC, PUK, RYM, SER, TOM w ten sposób, by na każdych dwóch sąsiednich polach znalazły się słowa mające dokładnie jedną literę wspólną?

Część II: A czy da się to zrobić, gdy słowa BAT i BUS zamienimy na BUT i BAS?

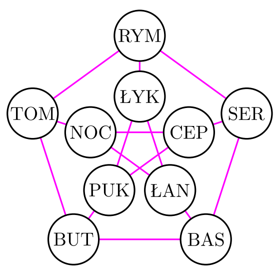
Rozwiązania są na sąsiedniej stronie, ale może lepiej spróbować najpierw samemu? Wskazówkami są poniższe rysunki.


Rys. *AI*


Rys. *AII*



Rys. *BI*

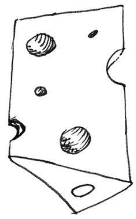


Rys. *BII*

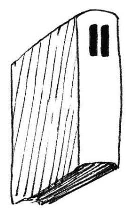
Małą Deltę przygotował Marcin HAUZER

Rozwiązania.

*A*I. Zamiast skupiać się na przypadku szachownicy 8×8 rozpatrzmy szachownicę o boku 2^n. Wykażemy (przez indukcję), że dla dowolnego położenia monomina da się ją pokryć L-trominami. Dla $n = 2$ jest to oczywiste. Załóżmy teraz, że umiemy to wykonać dla ustalonego n – sprawdzimy, że wtedy da się to wykonać dla szachownicy o boku 2^{n+1}. Połóżmy na niej monomino, a potem podzielmy ją na cztery szachownice o dwa razy krótszym boku. Następnie połóżmy jedną płytkę L-tromina tak, aby zakrywała po jednym polu każdej z trzech szachownic, na których monomino nie leży. Otrzymujemy zatem 4 szachownice o boku 2^n, a na każdej z nich zakryte jest dokładnie jedno pole. Z założenia indukcyjnego możemy więc zakryć je L-trominami. Takim sposobem ułożone są np. płytki na rysunku *A*I.



*A*II. Gdy szachownicę pokolorujemy tak, jak na rysunku *A*II, zauważymy, iż jakkolwiek położymy na niej tromino proste, zawsze będzie ono zakrywało po jednym polu każdego koloru. Pól czarnych i kolorowych jest na szachownicy po 21, białych zaś 22. Monomino musimy więc położyć na białym polu. Jest to warunek konieczny, ale jednak niewystarczający. Jeżeli udałoby się nam zakryć resztę szachownicy prostymi trominami, to po obróceniu układanki o $90°$ wokół środka szachownicy otrzymalibyśmy kolejne rozwiązanie, przy którym monomino znów leżałoby na białym polu. Jedyne białe pola, które przy takim obrocie przechodzą na białe pola, to c3, c6, f3, f6. Jeśli położymy monomino na którymś z nich, łatwo znajdziemy rozwiązanie.



B. Wierzchołki w grafach z rysunków *B*I i *B*II są połączone krawędzią, gdy słowa je reprezentujące mają wspólną literę. Zadanie sprowadza się do znalezienia w tych grafach ścieżek przechodzących dokładnie raz przez wszystkie wierzchołki i wracających do punktu wyjścia (takie ścieżki nazywamy *cyklami Hamiltona*). Gdy znajdziemy taką ścieżkę, będziemy mogli wypełnić diagram, wpisując po kolei kolejno spotykane na niej słowa. Każdy łatwo znajdzie cykl Hamiltona w grafie *B*I. Natomiast w drugim, zwanym *grafem Petersena*, cyklu Hamiltona na próżno szukać. Trzeba jednak dowieść, że znalezienie go jest niemożliwe.

Przypuśćmy więc, że w grafie Petersena znaleźliśmy cykl Hamiltona. Krawędzie wyznaczające ten cykl pokolorujmy na przemian dwoma kolorami (np. czerwonym i zielonym), a pozostałe krawędzie trzecim (np. niebieskim). W każdym wierzchołku byłyby zatem dwie kolejne krawędzie cyklu Hamiltona i trzecia, do niego nienależąca. Byłyby to więc krawędzie w trzech różnych kolorach. Ponieważ krawędzi na obwodzie jest 5, a kolorów tylko trzy, więc co najmniej dwie z nich musiałyby być tego samego koloru. Nie mogłyby to jednak być krawędzie kolejne, bo krawędzie mające wspólny koniec są w różnych kolorach. Bez naruszania więc ogólności możemy dla ustalenia uwagi przyjąć (ze względu na symetrię grafu i dowolność wyboru kolorów), że krawędzie TOM–BUT i BAS–SER są czerwone, a krawędź BUT–BAS jest zielona. Wtedy krawędzie BUT–PUK i BAS–ŁAN muszą być niebieskie. Ponieważ jedna z krawędzi RYM–TOM i RYM–SER jest zielona, a druga niebieska, więc krawędź RYM–ŁYK musiałaby być czerwona. Ale to niemożliwe, bo wtedy krawędzie ŁYK–PUK i ŁYK–ŁAN obie musiałyby być zielone i w wierzchołku ŁYK krawędzie byłyby tylko dwóch kolorów. Zatem nasze przypuszczenie, że w grafie Petersena można znaleźć cykl Hamiltona, okazało się fałszywe.