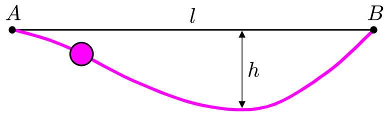
Brachistochrona – numerycznie

Jerzy GINTER *



Rys. 1. Ile czasu potrzebuje koralik, aby z punktu A dostać się do punktu B?

Rozważmy koralik, który może bez tarcia ślizgać się po drucie. Niech drut ten łączy dwa punkty A i B, znajdujące się na tej samej wysokości i odległe o l (rys. 1). Koralik puszczamy bez żadnej prędkości początkowej w punkcie A. Jak będzie się on poruszał pod wpływem przyciągania ziemskiego?

Gdyby drut był prosty, koralik nie zacząłby się w ogóle poruszać. Jeżeli jednak drut będzie wygięty, jak na rysunku 1, koralik puszczony w punkcie A najpierw zacznie się zsuwać ruchem przyspieszonym, w najniższym położeniu jego prędkość osiągnie największą wartość, a potem hamując podpełznie on do punktu B. Czas t tego ruchu zależy oczywiście od kształtu drutu. Możemy więc zapytać:

1. Ile wynosi czas t dla określonego kształtu drutu?
2. Jaki powinien być kształt drutu, aby wartość t była najmniejsza?

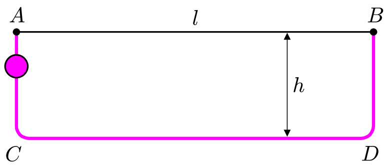
Krzywą, po której ruch będzie trwał najkrócej, nazywamy **brachistochroną** (od greckiego *brachistos* – najkrótszy, *chronos* – czas). Problem – w nieco innej formie – postawił już Galileusz. Podniósł go w końcu XVII wieku Johann Bernoulli, a rozwiązania podali, między innymi, Leibniz, Newton i de l'Hospital.

Metoda wariacyjna

Metodę wariacyjną stosuje się bardzo często w mechanice kwantowej. Używa się przy tym funkcji próbnych nie z jednym, ale z wieloma – nieraz kilkuset – parametrami wariacyjnymi.

Tutaj zastanowimy się, co na temat naszego problemu można powiedzieć bez znajomości rachunku różniczkowego, a posługując się jedynie komputerowymi obliczeniami numerycznymi. Zastosujemy przy tym sposób działania zwany **metodą wariacyjną**. Będziemy dowolnie proponować funkcje „próbne”, opisujące kształt toru (np. prostokątny, paraboliczny, eliptyczny), i sprawdzać, jaki odpowiada im czas przebiegu t. Postaramy się przy tym działać „elastycznie” i dopuścimy – w ramach określonego kształtu – możliwość zmiany „głębokości” toru h. Za każdym razem będziemy starali się – dla wybranego typu toru – dobrać tak h, aby odpowiadało ono najkrótszemu czasowi t. Uczenie naszą wielkość h nazywa się *parametrem wariacyjnym*.

Kształt toru 1



Rys. 2. Prostokątny kształt toru.

Rozważmy na początek przykład bardzo prosty: drut o kształcie prawie prostokątnym (rys. 2). Przyjmiemy, że załamania drutu nie są ostre, lecz łagodne, tak że koralik może na nich swobodnie zakręcać. Widać, że:

1. Na odcinku AC, który ma długość h, koralik spada swobodnie z przyspieszeniem ziemskim g. Czas tego spadku t_1 obliczymy ze wzoru

$$h = \frac{\mathrm{g}t_1^2}{2}, \tag{1}$$

skąd

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{\mathrm{g}}}. \tag{2}$$

W czasie tego spadku koralik osiągnie prędkość v o wartości

$$v = \mathrm{g}t_1 = \mathrm{g}\sqrt{\frac{2h}{\mathrm{g}}} = \sqrt{2\mathrm{g}h}. \tag{3}$$

2. Odcinek CD o długości l koralik przebiegnie ruchem jednostajnym z prędkością o wartości v w czasie t_2 równym

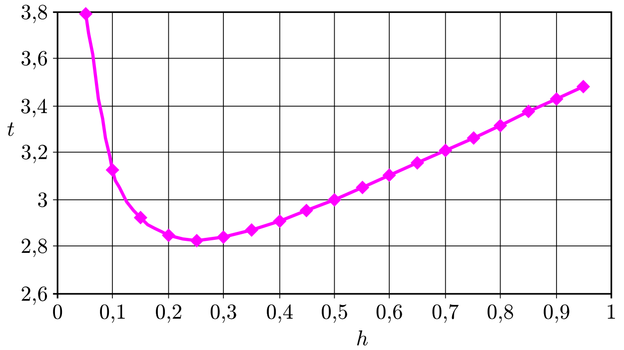
$$t_2 = \frac{l}{v} = \frac{l}{\sqrt{2\mathrm{g}h}}. \tag{4}$$

3. Na odcinku DB koralik będzie się wspinał przez czas równy t_1.

Łączny czas ruchu jest więc równy

$$t(h) = 2t_1 + t_2 = 2\sqrt{\frac{2h}{\mathrm{g}}} + \frac{l}{\sqrt{2\mathrm{g}h}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\Big(2\sqrt{2h} + \frac{l}{\sqrt{2h}}\Big). \tag{5}$$

*Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski



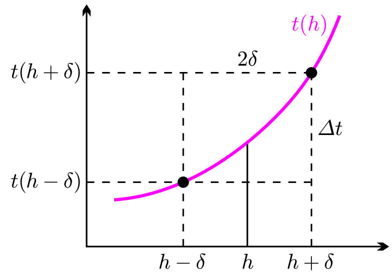
Rys. 3. Zależność czasu t od głębokości h dla toru prostokątnego.

We wzorze (5) zależność od przyspieszenia grawitacyjnego ma postać występującego przed nawiasem czynnika $1/\sqrt{\mathrm{g}}$. Człony w nawiasie zależą tylko od geometrii.

Dalej założymy dla uproszczenia, że $\mathrm{g} = 1$. Do warunków ziemskich można przejść, mnożąc uzyskane wyniki przez realny czynnik $1/\sqrt{\mathrm{g}}$.

Zależność $t(h)$ dla $\mathrm{g} = 1$ i $l = 1$ przedstawia rysunek 3. Widać, że ma ona minimum dla wartości h około 0,25.

Dokładniej można wyznaczyć położenie minimum na drodze następującego rozumowania (rys. 4).



Rys. 4. Dla krzywej rosnącej różnica Δt jest dodatnia.

Rozważmy otoczenie punktu o określonej współrzędnej h i weźmy pod uwagę różnicę

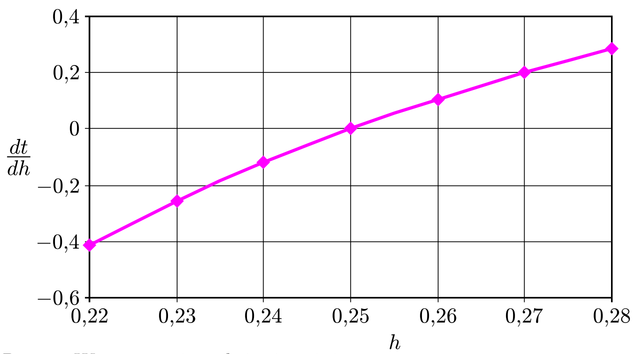
$$\Delta t = t(h+\delta) - t(h-\delta), \tag{6}$$

gdzie δ jest małą liczbą dodatnią.

1. Jeżeli funkcja $t(h)$ w tym miejscu rośnie, to różnica ta jest dodatnia.

2. Jeżeli funkcja $t(h)$ w tym miejscu maleje, to różnica ta jest ujemna.

3. Gdyby h odpowiadało minimum, to różnica (6) powinna być bliska zeru.



Rys. 5. Wyznaczanie położenia minimum.

Zwykle wygodniej rozważać nie różnicę (6), lecz wielkość

$$\frac{\Delta t}{2\delta} = \frac{t(h+\delta) - t(h-\delta)}{2\delta}. \tag{7}$$

Określa ona w przybliżeniu tangens kąta, który tworzy z poziomem styczna do krzywej w punkcie h (czyli pochodną funkcji $t(h)$ w punkcie h). Wykres zależności (7) od h dla funkcji (5) w okolicy minimum $t(h)$ przedstawia rysunek 5. Wartości h wybrane zostały na siatce o kroku 0,01; wartość $\delta = 0{,}001$. Widać, że – z dokładnością obliczeń – minimum wypada w punkcie $h = 0{,}25$ (co można też wykazać za pomocą rachunku różniczkowego). Odpowiada to czasowi t równemu

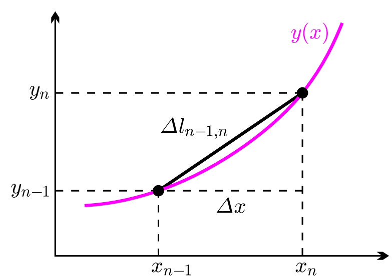
$$t(h) = 2\sqrt{2h} + \frac{l}{2h} = \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828. \tag{8}$$

Kształt toru 2

Rozważmy teraz przykład bardziej skomplikowany. Załóżmy nadal, że $l = 1$. Przypuśćmy, że kształt drutu opisany jest parabolą o głębokości w minimum równej h (por. rys. 8), czyli funkcją próbną

$$y(x) = -h \cdot 4x(1-x). \tag{9}$$

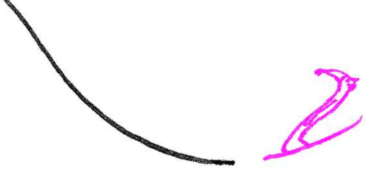
Czas t zależy od parametru wariacyjnego h. Na przykład dla $h \to 0$ parabola przechodzi w prostą poziomą, a więc czas dąży do nieskończoności. Postaramy się numerycznie wyznaczyć zależność $t(h)$ dla naszego przypadku. Wybierzmy najpierw na osi x siatkę o kroku równym Δx. Rozważmy czas $\Delta t_{n-1,\,n}$, w którym koralik przebywa wycinek drutu o długości $\Delta l_{n-1,\,n}$ zawarty pomiędzy x_{n-1} a x_n. Czas ten obliczymy, dzieląc długość $\Delta l_{n-1,\,n}$ przez średnią wartość prędkości na tym odcinku $v_{n-1,\,n}$.



Rys. 6. Obliczanie długości odcinka $\Delta l_{n-1,\,n}$.

1. Z twierdzenia Pitagorasa (rys. 6) mamy

$$\begin{aligned} \Delta l_{n-1,\,n} &= \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2} = \\ &= \sqrt{\Delta x^2 + (y_n - y_{n-1})} = \\ &= \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x}\right)^2}. \end{aligned} \tag{10}$$



2. Prędkość v_n dla współrzędnej x_n obliczymy, korzystając z prawa zachowania energii:

$$\frac{mv_n^2}{2} + mgy_n = 0, \tag{11}$$

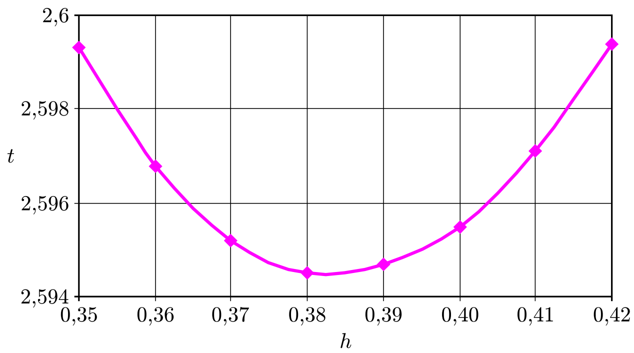
skąd otrzymujemy

$$v_n = \sqrt{g \cdot 2 \cdot (-y_n)} = \sqrt{2g|y_n|}. \tag{12}$$

3. Możemy już obliczyć $\Delta t_{n-1,n}$:

$$\Delta t_{n-1,n} = \frac{\Delta l_{n-1,n}}{v_{n-1,n}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sqrt{2}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{y_n-y_{n-1}}{\Delta x}\right)^2}}{\sqrt{|y_{n-1}|}+\sqrt{|y_n|}}\Delta x. \tag{13}$$

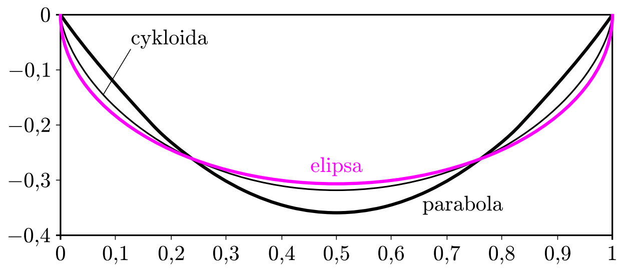
Całkowity czas t jest sumą wszystkich czasów cząstkowych $\Delta t_{n-1,\,n}$. Widać, że czynnik $1/\sqrt{g}$ przy tym sumowaniu będzie można wyciągnąć przed nawias – podobnie, jak dla kształtu toru 1. W dalszym ciągu przeprowadzimy więc obliczenia dla $g = 1$. Zauważmy ponadto, że ze względu na symetrię zagadnienia wystarczy obliczyć czas opadania, czyli dla zakresu $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$, a wynik pomnożyć przez 2.



Rys. 7. Zależność czasu t od głębokości h dla toru parabolicznego.

Wyniki numerycznych obliczeń $t(h)$ dla funkcji danej wzorem (9) i wybranego zakresu h przedstawia rysunek 7. Przyjęta została wartość $\Delta x = 0{,}01$. Minimum funkcji $t(h)$ przypada dla $h \approx 0{,}382$. Odpowiada to wartości czasu $t \approx 2{,}595$. Jest to wartość istotnie mniejsza niż w przykładzie poprzednim. Rysunek 8 przedstawia parabolę o wartości h odpowiadającej najkrótszemu czasowi ruchu (gruba krzywa czarna).

Szczegóły obliczeń przedstawione są w *Excelowym* programie *Brachistochrona*, znajdującym się na stronie internetowej *Delty*.



Rys. 8. Tory odpowiadające najkrótszym czasom t: paraboliczny (czarny) i eliptyczny (barwny). Cienka czarna linia przedstawia odwróconą cykloidę.

Kształt toru 3

Rozważmy przykład następny. Załóżmy nadal, że $l = 1$. Przypuśćmy, że drut ma kształt połowy elipsy o głębokości w minimum równej h, która jest opisana funkcją

$$y(x) = -h \cdot (4x(1-x))^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Zastosujemy algorytm identyczny, jak w przykładzie 2. Minimum funkcji $t(h)$ przypada teraz dla $h \approx 0{,}307$. Odpowiada to wartości czasu $t \approx 2{,}517$. Jest to wartość mniejsza niż w obu przykładach poprzednich. Rysunek 8 przedstawia elipsę o wartości h, odpowiadającej najkrótszemu czasowi ruchu (krzywa barwna).

Co nam wyszło?

W obliczeniach numerycznych otrzymaliśmy trzy różne minimalne czasy ruchu koralika, przy czym najkrótszy czas otrzymaliśmy dla toru eliptycznego. Zatem ten tor najlepiej przybliżał brachistochronę, która (patrz następny artykuł) jest odwróconą cykloidą, co daje czas ruchu koralika $t_{min} = \sqrt{2\pi} \approx 2{,}5066$. Nasze przybliżenia odbiegały zatem od rzeczywistej wartości odpowiednio o 13%, 4% i 0,4%!

Zadanie domowe: Zastosować algorytm z przykładu 2 do funkcji próbnej

$$y(x) = -h \cdot (4x(1-x))^{\frac{2}{3}}.$$

Uwaga formalna

Zauważmy, że z punktu widzenia formalnego mieliśmy w naszym problemie do czynienia z odwzorowaniem dwóch (nieskończonych) zbiorów: pierwszy ze zbiorów zawierał *funkcje* $y(x)$ określające kształt toru, drugi zbiór zawierał *liczby* t określające czas ruchu. Tego typu twór nazywamy *funkcjonałem* F

$$t = F(y(x)).$$

Jest to uogólnienie pojęcia „zwykłej” funkcji, która liczbom x przyporządkowuje liczby y.

Mówiąc uczenie – staraliśmy się znaleźć taką funkcję $y(x)$, która minimalizuje funkcjonał F.