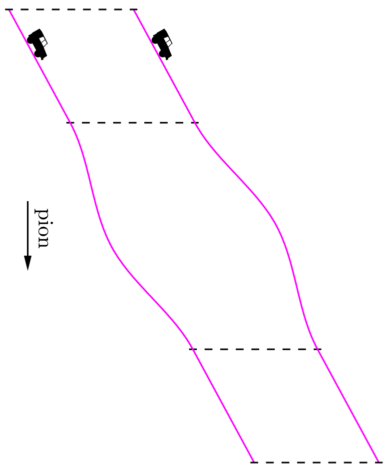
Brachistochrona – analitycznie

Marek KORDOS

Będziemy rozpatrywali zagadnienie brachistochrony nieco bardziej ogólnie: poszukiwany będzie tor, po którym (bez tarcia) pod wpływem grawitacji stoczy się kulka z punktu A do punktu B leżącego poniżej lub na tym samym poziomie w najkrótszym czasie.



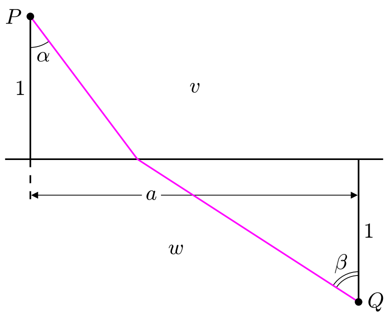
Rys. 1

Samochodziki na torze. Na wykładzie z fizyki doświadczalnej na pierwszym roku studiów oglądałem wyścigi samochodzików na torach, których profile przedstawia rysunek 1. Są one tej samej długości, mimo to samochodzik jadący po lewym torze stale wyprzedzał samochodzik na torze prawym. Wyjaśnienie było jasne. Na górnym odcinku torów samochodziki rozpędzają się tak samo. Na nierówności samochodzik lewy najpierw przyspiesza szybciej, a potem wolniej, tymczasem prawy przeciwnie – najpierw wolniej, potem szybciej. W wyniku tego na końcu wybojów oba znów mają tę samą prędkość, ale średnia prędkość lewego samochodzika na jego wyboju jest większa od średniej prędkości prawego samochodzika, który wobec tego z wyboju wyjeżdża później. A dalej jadą już tak samo, co daje zwycięstwo lewemu.

Stąd wnosimy, że brachistochrona będzie miała kształt tego typu, co lewy wybój.

Załamanie światła. Gdy matematycy żyjący na przełomie XVII i XVIII wieku zabierali się do rozwiązywania problemu brachistochrony, mieli do dyspozycji jedno zjawisko, w którym zakładano, że odbywa się ono na drodze najkrótszego czasu. Był to przebieg światła. Powszechnie przyjmowano zasadę Fermata, która głosi, że światło biegnie od punktu do punktu po linii pozwalającej przebyć tę drogę w najkrótszym czasie.

Wobec tego przebieg światła i zagadnienie brachistochrony są w pewnym sensie analogiczne. Różnica polega na tym, że prędkość światła zależy od ośrodka, w którym światło się porusza, a prędkość staczającej się kulki bierze się z grawitacji.



Rys. 2

Prawo Snelliusa. Z punktu P, znajdującego się na wysokości 1 nad granicą dwu przezroczystych ośrodków, do punktu Q, znajdującego się na głębokości 1 pod tą granicą, wysyłamy promień światła (rys. 2). Poszukujemy jego przebiegu. Prędkość światła w pierwszym ośrodku to v, w drugim w. Zadanie to rozwiązuje się dokładnie tak, jak typowe zadanie szkolne na ekstremum funkcji. Czas przebiegu to droga podzielona przez prędkość – liczymy ją w każdym ośrodku oddzielnie (jest to łatwe, bo w jednorodnym ośrodku światło biegnie po prostej) i dodajemy

$$t = \frac{1}{|v|\cos\alpha} + \frac{1}{|w|\cos\beta}.$$

Zgodnie z regułami rachunku wariacyjnego (łacińskie *vario* – zmieniać, *variatio* – rozmaitość, zmienność), traktujemy kąty α i β jako funkcje jakiegoś parametru: $\alpha(u)$ i $\beta(u)$. Nie są one niezależne: z rysunku mamy

$$\operatorname{tg}\alpha(u) = a - \operatorname{tg}\beta(u). \tag{1}$$

Pamiętając, że to funkcje, będziemy dalej opuszczali argument u.
Ale zróżniczkujemy (1) względem niego:

$$\frac{\alpha'}{\cos^2\alpha} = \frac{-\beta'}{\cos^2\beta}. \tag{2}$$

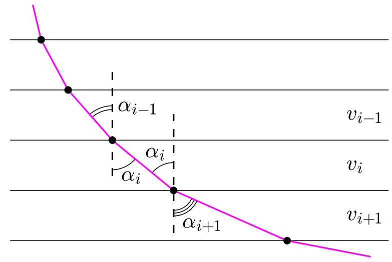
Obliczamy teraz pochodną t (to przecież też funkcja u) i podstawiamy (2).

$$t' = \frac{\alpha'\sin\alpha}{|v|\cos^2\alpha} + \frac{\beta'\sin\beta}{|w|\cos^2\beta} = \frac{\alpha'}{\cos^2\alpha}\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{|v|} - \frac{\sin\beta}{|w|}\right).$$

Jak widać, minimalny czas będzie osiągnięty, gdy

$$\frac{\sin\alpha}{|v|} = \frac{\sin\beta}{|w|},$$

bo tylko tam pochodna jest równa zeru. Otrzymaliśmy prawo Snelliusa.



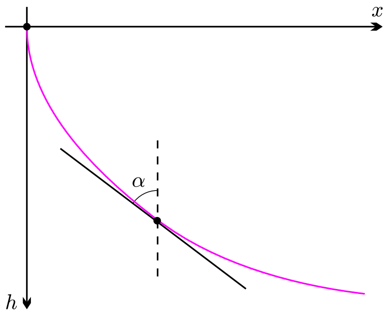
Rys. 3

Obliczenia. Wyobraźmy sobie, że przestrzeń została podzielona na poziome warstwy, przez które punkt materialny (no, bo tak trzeba myśleć o naszej idealnej kulce) poruszałby się zgodnie z prawem Snelliusa, stopniowo nabierając prędkości, a więc i zmieniając kierunek ruchu (rys. 3). Cały czas, zgodnie z tym prawem, będzie

$$\frac{\sin\alpha_i}{|v_i|} = \text{const.}$$

Od tego dyskretnego przypadku przejdźmy do opisu ciągłego. Będziemy zatem poszukiwać krzywej, dla której w każdym punkcie spełniony będzie warunek

$$\frac{\sin\alpha}{|v|} = \text{const.}$$



Rys. 4

Zgodnie z zależnością między energią potencjalną i kinetyczną (rys. 4) mamy

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad \text{czyli} \quad |v| = \sqrt{2gh}.$$

Zatem

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2gh(\alpha)}} = \text{const}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sin^2\alpha}{h(\alpha)} = \text{const.}$$

Tę ostatnią stałą wygodnie będzie oznaczać $1/(2r)$.

Mamy więc

$$h(\alpha) = 2r\sin^2\alpha = r(1-\cos 2\alpha).$$

Z definicji pochodnej mamy $\mathrm{d}x/\mathrm{d}h = \operatorname{tg}\alpha$, zatem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\cdot 2r\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 4r\sin^2\alpha = 2r(1-\cos 2\alpha).$$

Można, oczywiście, zamiast całkować, sprawdzić, że

$$\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right)' = (1-\cos 2\alpha).$$

Stąd otrzymujemy (przez całkowanie, co do niedawna umiał wykonać uczeń klasy matematyczno-fizycznej liceum), że

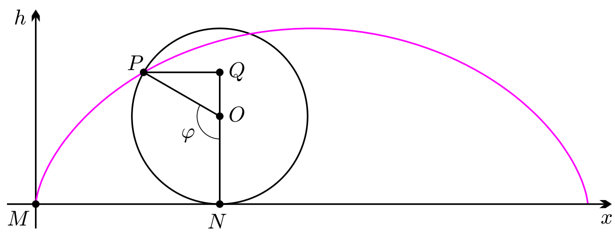
$$x = 2r\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) + C = r(2\alpha - \sin 2\alpha) + C.$$

Jest naturalne przyjęcie, że $C = 0$, bo niewątpliwie najlepszy start to start pionowy.

Otrzymaliśmy zatem krzywą, opisaną przez warunki (zamiast 2α napisaliśmy φ)

$$(x,\, h) = r(\varphi - \sin\varphi,\ 1-\cos\varphi).$$

Cykloida. Jest to tor dowolnego punktu koła toczącego się bez poślizgu po prostej. Sprawdźmy więc, czy przypadkiem nie jest to właśnie krzywa, którą uzyskaliśmy (rys. 5 – uwaga, tym razem oś h jest skierowana do góry!).



Rys. 5

Ponieważ toczenie odbywa się bez poślizgu, więc $MN = r\varphi$, bo taka jest długość łuku NP. Mamy też

$$PQ = r\sin(\pi-\varphi) = r\sin\varphi$$

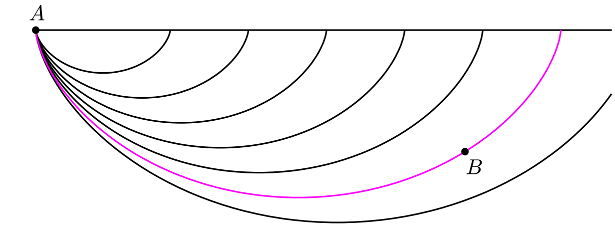
i

$$OQ = r\cos(\pi - \varphi) = -r\cos\varphi.$$

Zatem rzeczywiście cykloida spełnia warunek

$$(x,\, h) = (MN - PQ,\ NO + OQ) = \\ = r(\varphi - \sin\varphi,\ 1-\cos\varphi).$$

No dobrze, ale jak wybrać, która to cykloida? Po prostu rysujemy cykloidy odpowiadające różnym wartościom r i zaczynające się w A. Poszukiwaną brachistochroną jest ta, która trafia w B (rys. 6).



Rys. 6

Zadanie domowe. Obliczyć czas trwania ruchu po całej cykloidzie pod wpływem grawitacji – wskazówki w poprzednim artykule i w *Delcie* 2/2006, str. 2.

Cykloida nie jest krzywą algebraiczną, to znaczy nie można jej opisać za pomocą wielomianów. Ma długość $8r$ (Huygens) i ogranicza, wraz z prostą, pole $3\pi r^2$ (Roberval).