O pewnych równościach sum algebraicznych

Łatwo sprawdzić, że iloczyn dwóch sum dwóch sześcianów można na dwa sposoby wyrazić jako sumę czterech sześcianów, bowiem

$$(a^3+b^3)(c^3+d^3)=(ac)^3+(ad)^3+(bc)^3+(bd)^3=$$
$$=(ac+bd-ad)^3+(ac+bd-bc)^3+(ad+bc-ac)^3+$$
$$+(ad+bc-bd)^3.$$

Analogiczna zależność zachodzi dla pierwszej potęgi.

A oto przykłady:

$$9(r^3+s^3)=2^3r^3+2^3s^3+r^3+s^3=$$
$$=(2r-s)^3+2(r+s)^3+(2s-r)^3,$$ por. [1];

$$(r^3+s^3)^2=(r^2)^3+2r^3s^3+(s^2)^3=$$
$$=(2rs-r^2)^3+2(r^2-rs+s^2)^3+(2rs-s^2)^3;$$

$$7(r^3+s^3)=(2^3-1^3)(r^3+s^3)=2^3r^3+2^3s^3-r^3-s^3=$$
$$=(2r-3s)^3+(3r-s)^3+(3s-r)^3;$$

$$a^6-b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=$$
$$=(a^2+ab-b^2)^3+(a^2-ab-b^2)^3-a^6+b^6$$

skąd $2(a^6-b^6)=(a^2+ab-b^2)^3+(a^2-ab-b^2)^3$, por. [2];

$$7\cdot 91=(2^3-1^3)(4^3+3^3)=8^3+6^3-4^3-3^3=$$
$$=-1^3+9^3-6^3+5^3.$$

Z tych przykładów widzimy, że przedstawiony na wstępie wzór jest uogólnieniem pewnych wzorów występujących w literaturze. Zmieniając w nim znaki, uzyskujemy

$$(a^n-b^n)(c^n-d^n)=a^nc^n-a^nd^n-b^nc^n+b^nd^n=$$
$$=(ac+bd+ad)^n+(ac+bd+bc)^n-(ad+bc+ac)^n-$$
$$-(ad+bc+bd)^n,$$ słuszny dla $n=1,2,3$.

Wzór ten, napisany w postaci

$$(ac)^n+(bd)^n+(ad+bc+ac)^n+(ad+bc+bd)^n=$$
$$=(ad)^n+(bc)^n+(ac+bd+ad)^n+(ac+bd+bc)^n$$

pokazuje, że układ równań

$$x_1^n+x_2^n+x_3^n+x_4^n=y_1^n+y_2^n+y_3^n+y_4^n \text{ dla } n=1,2,3$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych x_i, y_i $(i=1,2,3,4)$.

Aleksander GÓRSKI

Literatura:

[1] A. Mąkowski, *Sur quelques problèmes concernant les sommes de quatre cubes*, Acta Arithmetica V.2 (1959) pp. 121–123.

[2] A. Mąkowski, *A cubic identity and its consequences*, Demonstratio Mathematica XVI (1983), pp. 537–539.

Zadania

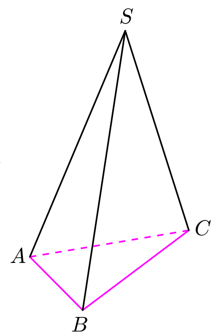
Redaguje Waldemar POMPE

Poniższe zadania pochodzą z 2 etapu II Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

1171. W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów, narysowano 10 odcinków. Wykazać, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.
Rozwiązanie na str. 2

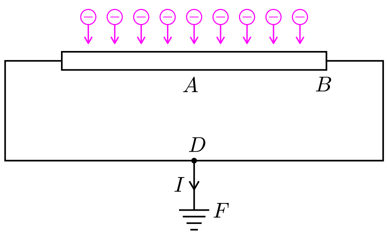
1172. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, że liczba $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ jest w systemie dziesiętnym zakończona cyframi „10”.
Rozwiązanie na str. 3

1173. Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$ (rys.), w którym $\sphericalangle ASB=\sphericalangle BSC=\sphericalangle CSA=20^\circ$. Wykazać, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości każdej z krawędzi AS, BS i CS
Rozwiązanie na str. 16



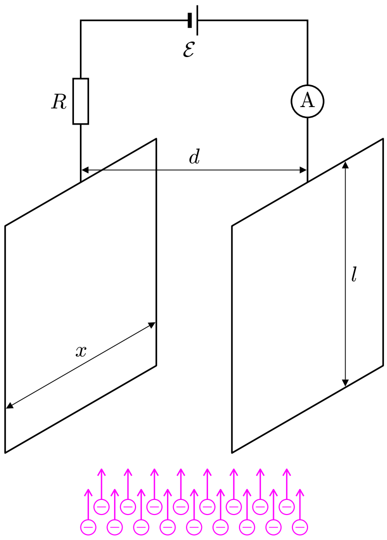
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 693. Jednorodny strumień elektronów pada na jednorodny pręt o oporze R uziemiony na obu końcach. Znaleźć różnicę potencjałów między środkiem pręta A a jego końcem B (rys. 1). Natężenie prądu w przewodzie uziemiającym DF wynosi I.
Rozwiązanie na str. 6



Rys. 1

F 694. Jednorodna wiązka elektronów z prędkością v_0 wpada między okładki kondensatora płaskiego tak, że wypełnia ona całą przestrzeń między okładkami (rys. 2). Kondensator podłączony jest za pośrednictwem opornika R do źródła siły elektromotorycznej $\mathcal{E}$. Znaleźć natężenie prądu płynącego przez ten opornik. Strumień elektronów w jednostce objętości równy jest n_V.
Rozwiązanie na str. 5



Rys. 2