

## O pewnych równościach sum algebraicznych

Łatwo sprawdzić, że iloczyn dwóch sum dwóch sześciątów można na dwa sposoby wyrazić jako sumę czterech sześciątów, bowiem

$$(a^3 + b^3)(c^3 + d^3) = (ac)^3 + (ad)^3 + (bc)^3 + (bd)^3 =$$

$$= (ac + bd - ad)^3 + (ac + bd - bc)^3 + (ad + bc - ac)^3 +$$

$$+ (ad + bc - bd)^3.$$

Analogiczna zależność zachodzi dla pierwszej potęgi.

A oto przykłady:

$$9(r^3 + s^3) = 2^3 r^3 + 2^3 s^3 + r^3 + s^3 =$$

$$= (2r - s)^3 + 2(r + s)^3 + (2s - r)^3, \text{ por. [1];}$$

$$(r^3 + s^3)^2 = (r^2)^3 + 2r^2 s^3 + (s^2)^3 =$$

$$= (2rs - r^2)^3 + 2(r^2 - rs + s^2)^3 + (2rs - s^2)^3;$$

$$7(r^3 + s^3) = (2^3 - 1^3)(r^3 + s^3) = 2^3 r^3 + 2^3 s^3 - r^3 - s^3 =$$

$$= (2r - 3s)^3 + (3r - s)^3 + (3s - r)^3;$$

$$a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) =$$

$$= (a^2 + ab - b^2)^3 + (a^2 - ab - b^2)^3 - a^6 + b^6$$

skąd  $2(a^6 - b^6) = (a^2 + ab - b^2)^3 + (a^2 - ab - b^2)^3$ ,  
por. [2];

$$7 \cdot 91 = (2^3 - 1^3)(4^3 + 3^3) = 8^3 + 6^3 - 4^3 - 3^3 =$$

$$= -1^3 + 9^3 - 6^3 + 5^3.$$

Z tych przykładów widzimy, że przedstawiony na wstępie wzór jest uogólnieniem pewnych wzorów występujących w literaturze. Zmieniając w nim znaki, uzyskujemy

$$(a^n - b^n)(c^n - d^n) = a^n c^n - a^n d^n - b^n c^n + b^n d^n =$$

$$= (ac + bd + ad)^n + (ac + bd + bc)^n - (ad + bc + ac)^n -$$

$$- (ad + bc + bd)^n, \text{ słuszny dla } n = 1, 2, 3.$$

Wzór ten, napisany w postaci

$$(ac)^n + (bd)^n + (ad + bc + ac)^n + (ad + bc + bd)^n =$$

$$= (ad)^n + (bc)^n + (ac + bd + ad)^n + (ac + bd + bc)^n$$

pokazuje, że układ równań

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n = y_1^n + y_2^n + y_3^n + y_4^n \text{ dla } n = 1, 2, 3$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach naturalnych  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Aleksander GÓRSKI

### Literatura:

[1] A. Mąkowski, *Sur quelques problèmes concernant les sommes de quatre cubes*, Acta Arithmetica V.2 (1959) pp. 121–123.

[2] A. Mąkowski, *A cubic identity and its consequences*, Demonstratio Mathematica XVI (1983), pp. 537–539.



## Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

Poniższe zadania pochodzą z 2 etapu II Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

**1171.** W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów, narysowano 10 odcinków. Wykazać, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

Rozwiązanie na str. 2

**1172.** Rozstrzygnąć, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite  $a, b, c, d$ , że liczba  $(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)$  jest w systemie dziesiętnym zakończona cyframi „10”.

Rozwiązanie na str. 3

**1173.** Trójkąt  $ABC$  jest podstawą ostrosłupa  $ABCS$  (rys.), w którym  $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 20^\circ$ . Wykazać, że obwód trójkąta  $ABC$  jest nie mniejszy od długości każdej z krawędzi  $AS, BS$  i  $CS$ .

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

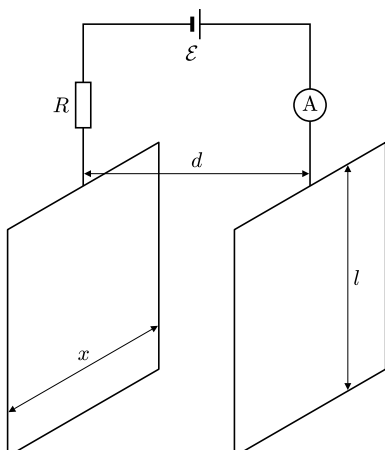
**F 693.** Jednorodny strumień elektronów pada na jednorodny pręt o oporze  $R$  uziemiony na obu końcach. Znaleźć różnicę potencjałów między środkiem pręta  $A$  a jego końcem  $B$  (rys. 1). Natężenie prądu w przewodzie uziemiającym  $DF$  wynosi  $I$ .

Rozwiązanie na str. 6

**F 694.** Jednorodna wiązka elektronów z prędkością  $v_0$  wpada między okładki kondensatora płaskiego tak, że wypełnia ona całą przestrzeń między okładkami (rys. 2). Kondensator podłączony jest za pośrednictwem opornika  $R$  do źródła siły elektromotorycznej  $\mathcal{E}$ . Znaleźć natężenie prądu płynącego przez ten opornik. Strumień elektronów w jednostce objętości równy jest  $n_V$ .

Rozwiązanie na str. 5

Rys. 1



Rys. 2

