Kontra d'Alemberta na twierdzenie Dooba

Rafał SZTENCEL

Miesiąc temu opowiadaliśmy o martyngałach: są to takie ciągi zmiennych losowych (X_n), że:

$$E(X_{n+1}|X_n,\ldots,X_0) = X_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Jeśli X_n jest łączną wygraną w pewnej grze do chwili n, to powyższa równość mówi, że średnia wygrana w chwili $n+1$, gdy znamy historię gry do chwili n, wynosi X_n. Średni przyrost wygranej jest zatem zerowy, a grę nazwiemy sprawiedliwą. W literaturze martyngały nazywa się zresztą czasami „ciągami absolutnie *fair*".

Dla hazardzisty martyngał oznacza sposób ustalania stawek, który miałby zwiększać szanse wygranej. Martyngał klasyczny wymaga podwojenia stawki po każdej przegranej. Jest wiele martyngałów, nierzadko o fantazyjnych nazwach: wielki, amerykański, holenderski, *piquemouche*, *paroli*, kontra d'Alemberta. Zaczynamy się domyślać, że skoro jest ich tak wiele, to żaden nie jest skuteczny. I rzeczywiście, nawet kontra d'Alemberta nie pomoże przeciwko podstawowemu twierdzeniu teorii – twierdzeniu Dooba.

Powody są dwa: po pierwsze, gra w kasynie nie jest oczywiście sprawiedliwa, bowiem wygrane tworzą *nadmartyngał*, czyli

$$E(X_{n+1}|X_n,\ldots,X_0) \leqslant X_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Z punktu widzenia kasyna mamy do czynienia z *podmartyngałem*.

Po drugie, ze wspomnianego twierdzenia wynika, że nawet w grze sprawiedliwej żadna taktyka, polegająca na wycofaniu się z gry w chytrze wybranym momencie, ani żaden sposób ustalania stawek nie zmieni faktu, że średnia wygrana w każdej turze jest zerowa.

Dlaczego każda realistyczna metoda obstawiania zamienia martyngał na martyngał? Stawka w $(n+1)$-szej turze może zależeć jedynie od historii gry do chwili n (wykluczamy przewidywanie przyszłości), jest więc postaci $f(X_0,\ldots,X_n)$. Jeśli tyle postawimy, to wygramy

$$f(X_0,\ldots,X_n)\cdot(X_{n+1}-X_n).$$

Gdyby Czytelnik miał wątpliwości co do tego wzoru, niech sobie przypomni Jasia, grającego z Małgosią w orła i reszkę. Jeśli Jaś postawił a zł na orła, musi dostać zwrot stawki plus a zł, gdy wypadnie orzeł. Obliczamy średnią wygraną w $(n+1)$-szej turze:

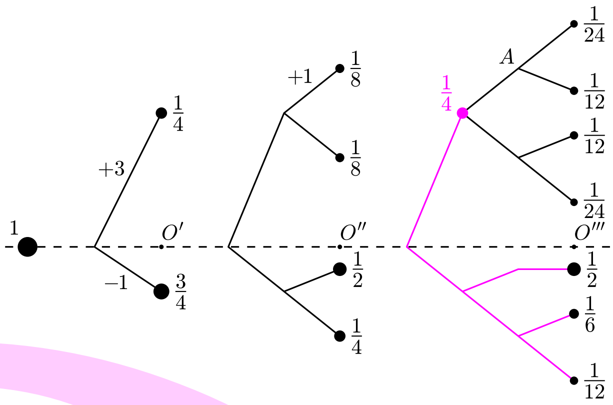
$$E(f(X_0,\ldots,X_n)\cdot(X_{n+1}-X_n)|X_0,\ldots,X_n) =$$
$$= f(X_0,\ldots,X_n)\cdot E(X_{n+1}-X_n|X_0,\ldots,X_n) = 0.$$

Skorzystaliśmy ze znanej własności warunkowej wartości oczekiwanej. Wymaga ona założenia, że zmienna losowa $f(X_0,\ldots,X_n)$ jest ograniczona – wówczas $E|f(X_0,\ldots,X_n)\cdot(X_{n+1}-X_n)| < \infty$, z czego wynika, że warunkowa wartość oczekiwana ma sens. Założenie to można osłabiać, ale i w tej postaci nie jest zbyt ograniczające, bo wyklucza jedynie nieskończony kapitał gracza.

Można sobie poradzić i bez jawnego używania warunkowej wartości oczekiwanej. Jeśli zdecydowaliśmy już, że stawiamy a zł, to wygramy $a\cdot(X_{n+1}-X_n)$ zł, zatem średnio – zero.

Zbadamy teraz, czym charakteryzują się dopuszczalne sposoby wyboru chwili wycofania się z gry, zwane momentami stopu lub momentami Markowa. Rysunek przedstawia schemat zmodyfikowanej gry w orła i reszkę z poprzedniego odcinka.

Jak widać, $P(X_0=0)=1$; $P(X_1=3)=\frac{1}{4}$, $P(X_1=-1)=\frac{3}{4}$, więc $EX_1=0$; $P(X_2=4|X_1=3)=P(X_2=2|X_1=3)=$ $=\frac{1}{2}$, zatem $E(X_2|X_1=3)=3$, etc.



Zmienne losowe X_0,X_1,X_2,X_3 tworzą martyngał. Można to wyrazić inaczej: jeśli prawdopodobieństwa wyobrazimy sobie jako masy, to na wszystkich czterech rysunkach drzewka są zrównoważone w tym sensie, że wysokość środka masy gałęzi wyrastającej z węzła jest równa wysokości tegoż węzła. W szczególności, środki masy wszystkich drzewek (punkty O', O'', O''') są na tej samej wysokości, co korzeń.

Na drzewku po prawej zaznaczono kolorem możliwe historie gry, odpowiadające taktyce „wycofać się, gdy wygrana osiągnie 3 zł", opisanej przez zmienną losową

$$\tau = \inf\{n\colon X_n = 3 \vee n = 3\}.$$

Jest to taktyka dopuszczalna. Z rysunku odczytujemy, że $P(X_\tau=3)=\frac{1}{4}$, $P(X_\tau=-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, $P(X_\tau=-\frac{3}{2})=\frac{1}{6}$; $P(X_\tau=-3)=\frac{1}{12}$. Jak można było przewidzieć, $EX_\tau=EX_0=0$. Tak będzie dla każdej dopuszczalnej taktyki: przerwanie gry w momencie stopu τ jest równoważne obcięciu niektórych gałęzi i przemieszczeniem mas do węzła, z którego wyrastały. Taka operacja nie zmienia wysokości środka masy.

Czytelnik zechce się zastanowić, jak przedstawić na rysunku jawnie niedopuszczalną taktykę: „wycofać się, gdy wygrana osiągnie maksimum". Na przykład w punkcie A nie możemy na podstawie wartości X_0, X_1 i X_2 podjąć decyzji, czy kończymy grę, chyba że wróżka powie nam, jaką wartość przyjmie X_3.

Udowodniliśmy – co prawda w prostym przypadku

Twierdzonko. *Jeśli (X_n) jest martyngałem, a τ ograniczonym momentem stopu, to $EX_\tau = EX_0$.*

Oto równoważne sformułowanie, które Czytelnicy mający pewne obycie z warunkową wartością oczekiwaną mogą spróbować udowodnić techniką drzewek:

Twierdzenie Dooba. *Jeśli (X_n) jest martyngałem, a $\tau_1 \leqslant \tau_2$ są ograniczonymi momentami stopu, to $E(X_{\tau_2}|X_{\tau_1}) = X_{\tau_1}$.*

Stąd interesujący wniosek: jeśli deterministyczne chwile $1,2,\ldots,n$ zastąpimy przez ograniczone momenty stopu $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_n$, to ciąg $X_{\tau_1}, X_{\tau_2},\ldots,X_{\tau_n}$ będzie nadal martyngałem!

Cóż więc wynika z twierdzenia Dooba dla gracza stosującego wyrafinowaną metodę stopowania τ? Nie da się zmienić faktu, że $EX_\tau = 0$. Ale jeśli chcemy wygrać 1 zł, a możemy zaangażować 1000 zł, to mamy dużą szansę sukcesu (i to niezależną od metody!), bowiem

$$0 = EX_\tau = 1\cdot P(X_\tau=1) - 1000\cdot P(X_\tau=-1000),$$

i $P(X_\tau=1)+P(X_\tau=-1000)=1$, więc $P(X_\tau=1)=\frac{1000}{1001}$.