Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2007

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
527 ($WT = 2{,}06$) i **528** ($WT = 1{,}00$)
z numeru 10/2006

Piotr Kumor	– Olsztyn	45,89
Krzysztof Dorobisz	– Kraków	43,42
Michał Jastrzębski	– Warszawa	43,27
Łukasz Garncarek	– Opole	43,00
Andrzej Jóźwik	– Warszawa	42,67
Tomasz Wietecha	– Tarnów	39,00
Andrzej Daniluk	– Warszawa	37,86
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	36,52
Dariusz Kurpiel	– Posada Zarszyn	35,82

Piotr Kumor idzie jak burza. Punktów liczbę magiczną czterdzieści-i-cztery zgromadził na swym koncie już po raz dziesiąty!

Zadania z matematyki nr 543, 544

Redaguje Marcin E. KUCZMA

543. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające warunki

$$x\bigl(f(x+1)-f(x)\bigr) = f(x) \quad \text{dla } x\in\mathbb{R},$$
$$|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y| \quad \text{dla } x,y\in\mathbb{R}.$$

544. Jak wiadomo (od czasów Eulera), równanie $x^3+y^3=z^3$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z. A czy równanie

$$x^{3/2}+y^{3/2}=z^{3/2}$$

ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z?

Zadanie 544 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2007

Przypominamy treść zadań:

535. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze postaci $p=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, gdzie a, b są liczbami naturalnymi.

536. Znaleźć wszystkie wielomiany W (o współczynnikach rzeczywistych) spełniające równanie

$$W(x)+W(4x)+W(6x)+W(7x)=W(2x)+W(3x)+W(5x)+W(8x) \text{ dla } x\in\mathbb{R}.$$

535. Przyjmijmy, że liczby a, b, p spełniają podane warunki i wprowadźmy oznaczenie $a-b=d$ (więc $d\in\mathbb{N}$). Wówczas $4p^2=b^2d/(2b+d)$, czyli

$$db^2-8p^2b-4dp^2=0.$$

Liczba naturalna b jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $dx^2-8p^2x-4dp^2$, więc jego wyróżnik $\Delta=16p^2(4p^2+d^2)$ musi być kwadratem liczby całkowitej. Zatem

$$4p^2+d^2=q^2$$

dla pewnej liczby naturalnej q.

W takim razie $4p^2=(q+d)(q-d)$; czynniki w nawiasach są jednakowej parzystości, muszą być oba parzyste. Przyjmując $q+d=2u$, $q-d=2v$, mamy

$$uv=p^2,\quad u>v\geqslant 1;$$

a skoro p jest liczbą pierwszą, to $u=p^2$, $v=1$, czyli

$$q=u+v=p^2+1,\qquad d=u-v=p^2-1.$$

Wspomniany trójmian kwadratowy ma pierwiastki różnych znaków, więc liczba b jest jego większym pierwiastkiem:

$$b=\frac{8p^2+\sqrt{\Delta}}{2d}=\frac{4p^2+2pq}{d}=\frac{4p^2+2p(p^2+1)}{p^2-1}=2p+\frac{4p}{p-1}.$$

To pokazuje, że liczba 4 dzieli się przez $p-1$, a zatem p jest jedną z liczb 2, 3, 5.

Dla każdej z tych wartości p napisane wyżej wzory wyznaczają wartości b, q, d, a. Dostajemy następujące trójki (p,a,b): $(2,15,12)$, $(3,20,12)$, $(5,39,15)$, które istotnie spełniają wymagane warunki.

536. Niech W będzie wielomianem nie równym tożsamościowo zeru,

$$W(x)=a_nx^n+\ldots+a_0 \qquad (n\geqslant 0;\quad a_n\neq 0).$$

Lewa strona zadanego równania jest wielomianem, w którym współczynnik przy x^n jest równy

$$(1^n+4^n+6^n+7^n)a_n;$$

po prawej stronie analogiczny współczynnik wynosi

$$(2^n+3^n+5^n+8^n)a_n.$$

Jeśli równanie jest tożsamościowo spełnione, to

$$1^n+4^n+6^n+7^n=2^n+3^n+5^n+8^n.$$

Ta równość zachodzi dla $n=0,1,2$; nie zachodzi dla $n=3$ (bo $624\neq 672$) ani dla żadnego większego n, bowiem jej lewa strona ma dla $n\geqslant 4$ wartość mniejszą niż sam składnik 8^n po prawej stronie.

Rozważane równanie nie jest więc spełnione przez żaden wielomian stopnia większego od 2, jest zaś spełnione przez jednomiany

$$W_0(x)=1,\quad W_1(x)=x,\quad W_2(x)=x^2.$$

Jest też spełnione przez każdą kombinację liniową tych jednomianów. Zatem ogólnym rozwiązaniem równania jest zbiór wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej 2.

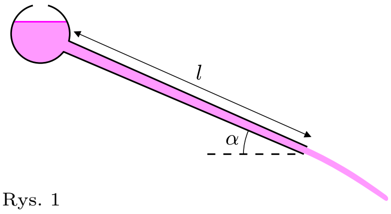
Klub 44

Zadania z fizyki nr 440, 441

Redaguje Jerzy B. BROJAN

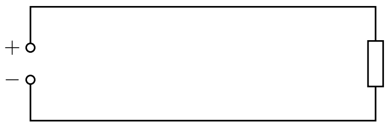
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2007

440. Jaś mieszka w wysokim budynku i zabawia się, oblewając przechodniów wodą z okna. Używa w tym celu konewki (schemat – zob. rys. 1), a żeby sięgnąć strumieniem wody bliżej lub dalej, zmienia jej kąt pochylenia α. Jaki kąt da mu największy zasięg strumienia? Jak daleko powinien stać przechodzień, aby czuć się bezpiecznie? Długość konewki l i wysokość spadku h są dane (oczywiście $l \ll h$). Opór powietrza należy pominąć.



Rys. 1

441. Dwa równoległe długie przewodniki prostoliniowe o promieniu $r = 1\,\mathrm{mm}$ są odległe o $d = 10\,\mathrm{cm}$. Z jednej strony do ich końców przyłożono pewne napięcie, a z drugiej połączono je opornikiem R (rys. 2). Opór samych przewodników można pominąć. Jaka powinna być wartość R, aby siła elektrostatycznego przyciągania ładunków na jednym i drugim przewodniku równoważyła się z siłą magnetycznego odpychania przewodników, wynikającą z przepływu prądu? Względna przenikalność elektryczna i magnetyczna ośrodka wynosi 1.

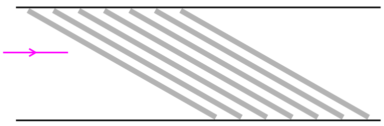


Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2007

Przypominamy treść zadań:

432. Prosty polaryzator (rys. 3) jest zestawem równoległych płytek szklanych ustawionych pod kątem Brewstera i umieszczonych w pudełku pomalowanym od środka na czarno. Gdy skierujemy na nie wiązkę światła niespolaryzowanego, wychodzące światło staje się spolaryzowane, w stopniu zależnym od liczby płytek. Z ilu płytek powinien składać się przyrząd, aby zawierało ono nie więcej niż 10% „niewłaściwej” składowej? Pudełko jest szerokie, tak że trzeba uwzględnić dowolną liczbę odbić światła od różnych powierzchni płytek. Przyjąć $n = 1{,}5$, pominąć pochłanianie światła w szkle i efekty interferencji.


Rys. 3

Wskazówka: gdy promień pada na powierzchnię szkła pod kątem Brewstera (lub wybiega pod kątem Brewstera) i jest spolaryzowany w płaszczyźnie prostopadłej, współczynnik odbicia R wynosi

$$R = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2$$

433. W jednym z artykułów ze *Świata Nauki* w zeszłym roku można było przeczytać, że powyżej pewnej energii progowej (tzw. granica GZK) proton może rozproszyć się na niskoenergetycznym fotonie promieniowania reliktowego wypełniającego przestrzeń międzygwiazdową, w wyniku czego powstaje mezon π^0. Obliczyć wartość granicy GZK. Dana jest energia fotonu $E_f = 10^{-3}\,\mathrm{eV}$, masa protonu $m_p = 938\,\mathrm{MeV/c^2}$, masa mezonu $m_\pi = 135\,\mathrm{MeV/c^2}$.

432. Przyjmijmy, że promień padający jest spolaryzowany w płaszczyźnie prostopadłej, a jego natężenie jest równe 1. Oznaczmy współczynnik przejścia $T = 1 - R$. Wiązka przechodząca przez jedną płytkę składa się z promienia przechodzącego bez odbicia, którego natężenie wynosi T^2, promienia dwukrotnie odbitego wewnętrznie o natężeniu T^2R^2, promienia czterokrotnie odbitego wewnętrznie o natężeniu T^2R^4 itd. – łącznie natężenie wiązki przechodzącej jest równe

$$T_1 = T^2 + T^2R^2 + T^2R^4 \ldots = \frac{T}{2-T}$$

W podobny sposób można wyprowadzić wzór rekurencyjny na współczynnik przejścia dla k płytek

$$T_{k+1} = \frac{T_kT_1}{T_k + T_1 - T_kT_1}$$

Postawiony w zadaniu warunek ma postać

$$T_k < 0{,}1(1 + T_k),$$

czyli

$$T_k < 0{,}111.$$

Obliczenia wykazują, że przy podanej wartości współczynnika załamania minimalną liczbą płytek jest $k = 24$. W praktyce wystarczy znacznie mniejsza liczba, gdyż założenie o uwzględnieniu dowolnej liczby odbić nie odpowiada rzeczywistości, a właśnie wielokrotne odbicia przyczyniają się do zwiększenia natężenia niewłaściwej składowej w wiązce wybiegającej z przyrządu.

433. Oznaczmy całkowitą energię protonu przez E. Jego pęd wyraża się wzorem

$$p_p = \sqrt{E^2/\mathrm{c}^2 - m_p^2\mathrm{c}^2}$$

Najniższą wartość E niezbędną do wytworzenia mezonu otrzymamy zakładając, że pędy protonu i fotonu są skierowane przeciwnie, czyli całkowity pęd jest równy

$$p = p_p - E_f/\mathrm{c}.$$

Całkowita energia w układzie środka masy wynosi

$$E_c = \sqrt{(E + E_f)^2 - p^2\mathrm{c}^2}$$

Tę energię należy przyrównać do sumy energii spoczynkowych protonu i mezonu. W wyniku przekształceń otrzymujemy warunek

$$2p_p\mathrm{c}E_f + 2EE_f = 2m_pm_\pi\mathrm{c}^4 + m_\pi^2\mathrm{c}^4$$

Jeśli zauważymy, że

$$E \gg m_p\mathrm{c}^2,$$

to możemy oszczędzić sobie rozwiązywania równania kwadratowego i przybliżyć po lewej $p_p\mathrm{c} \approx E$, czyli

$$E = (2m_p + m_\pi)\frac{m_\pi\mathrm{c}^4}{4E_f} = 6{,}8 \cdot 10^{19}\,\mathrm{eV}.$$