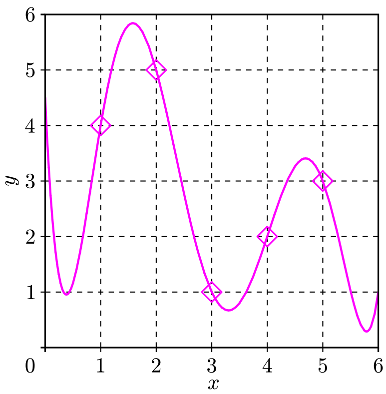
Jak się rozmnażają punkty okresowe?

Elżbieta KRĘPSKA *



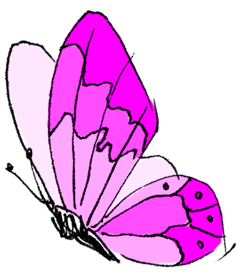
Rys. 1. Wielomian $\mathcal{W}\colon [0,6] \to [0,6]$, dla którego punkt 1 jest punktem okresowym o orbicie $1 \to 4 \to 2 \to 5 \to 3 \to 1$ długości 5. Punkty orbity oznaczono rombami.

Będziemy zajmować się funkcjami $f\colon [a,b] \to [a,b]$, których wykres można narysować bez odrywania ołówka od kartki, tzn. funkcjami ciągłymi. Są to, na przykład, wielomiany, doskonale znane każdemu uczniowi liceum.

Zauważmy, iż jeśli weźmiemy pewien punkt p z dziedziny f, to dobrze określony jest inny punkt $f(f(p))$ – dwukrotna iteracja funkcji f w punkcie p, którą oznaczamy przez $f^2(p)$. Jeśli „przypadkiem” trafimy z powrotem do p, tj. $f(f(p)) = p$, to znaleźliśmy *punkt okresowy* p o okresie 2. Analogicznie mówimy o f^n, n-krotnym złożeniu f, a także o punktach okresowych o okresie n. Jeśli p jest punktem o okresie n, to zbiór (różnych) punktów $\{p, f(p), f^2(p), \ldots, f^{n-1}(p)\}$ nazywamy *orbitą* dla p.

Zacznijmy od prostego zadania: wskazać przykład funkcji ciągłej, która ma punkt okresowy o okresie 5. Takich funkcji jest oczywiście ogromnie dużo. Przypuśćmy, że poszukujemy orbity $1 \to 4 \to 2 \to 5 \to 3 \to 1$. Narysujmy więc odpowiednie punkty $(1,4)$, $(4,2)$, $(2,5)$, $(5,3)$ i $(3,1)$ i połączmy je bez odrywania ołówka. Voilà. Wynik może wyglądać tak, jak wykres $\mathcal{W}$ na rysunku 1.

Zauważmy, że funkcja $\mathcal{W}$ ma punkt o okresie 1, tzw. punkt stały. Znajduje się on na przecięciu wykresu wielomianu $\mathcal{W}$ i funkcji $y(x) = x$, w okolicach $p \approx 2{,}55$. Jeśli dobrze się przyjrzeć, to zauważymy również punkt o okresie 2 ($p \approx 2{,}22$). A czy istnieje punkt okresowy o okresie 3? A 99 albo 2007? Zadanie wygląda na niełatwe.



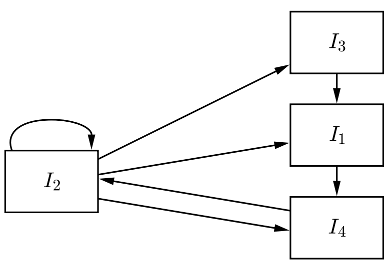
Zadajmy jeszcze ambitniejsze pytanie: czy można znaleźć taką funkcję, która ma punkt okresowy o okresie 5, ale *nie* ma punktu o okresie 2? Zauważmy, że na pewno punkt o okresie 1 jest nieunikniony. Jak by nie rysować, gdzieś przetniemy $y(x) = x$, gdyż wykres nie może mieć żadnych „dziur”. Można wykazać, że również punkt o okresie 2 musi się pojawić. A czy można znaleźć funkcję, która ma punkt okresowy o okresie 7, ale nie ma punktu o okresie 5? Tym razem odpowiedź jest pozytywna, taka funkcja istnieje, ale jej zgadnięcie nie jest bynajmniej takie proste! (Przykład można znaleźć w książce Roberta Devaney'a *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.*)

Będziemy rozważać następujące ogólniejsze zagadnienie. Niech $k, l \in \mathbb{N}$. Czy jeśli wiemy, że funkcja ciągła ma punkt okresowy o okresie k, to czy wiemy coś o punktach okresowych o okresie l? Tak, i to zdumiewa!

W roku 1975 w USA Tien-Yien Li i James Yorke opublikowali pracę pod kultowym już tytułem *Okres trzy wywołuje chaos.* Uproszczona wersja zawartego w niej twierdzenia brzmi następująco.

Twierdzenie 1. Niech $f\colon J \to J$, gdzie J jest przedziałem domkniętym. Przypuśćmy, że f ma punkt okresowy o okresie 3 i orbicie $a \to b \to c \to a$ dla $a < b < c$ lub $a > b > c$. Wówczas dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje w J punkt okresowy o okresie k.

Zatem z istnienia jednego punktu 3-okresowego dostajemy od razu nieskończenie wiele innych, całe multum punktów, o dowolnych okresach. Na przykład, jeśli znajdziemy taki punkt dla naszego $\mathcal{W}$, to będziemy wiedzieć, że ma punkty o okresach i 100, i 2007, i dowolnych innych. Ale skąd one się, u licha, biorą – te miliony punktów? Zrozumiemy to za pomocą A-grafu.



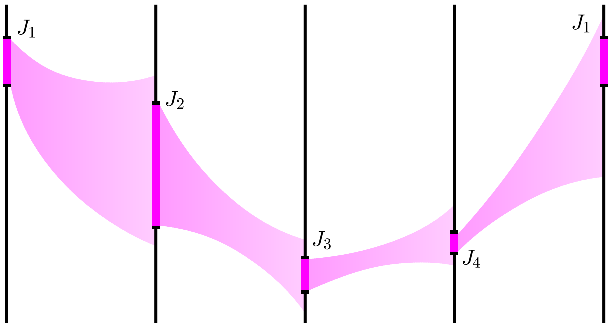
Rys. 2. A-graf odpowiadający punktowi 1 dla funkcji $\mathcal{W}$ z rysunku 1.

Definicja 2. Powiemy, że przedział I nakrywa J przy funkcji f, gdy $f(I) \supseteq J$. Niech x będzie punktem okresowym o okresie $n > 1$ i orbicie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ uporządkowanej $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Oznaczmy przedziały $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ dla $k = 1, \ldots, n-1$. Graf o wierzchołkach $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$ nazywamy *A-grafem*. Krawędź $I_j \to I_k$ występuje w A-grafie, gdy przedział I_j nakrywa I_k.

Zobaczmy, jak zbudować A-graf dla $\mathcal{W}$ i $p = 1$ (patrz rys. 1). Orbita p jest długości $n = 5$. Zatem A-graf ma 4 wierzchołki $I_k = [k, k+1]$, $k = 1, \ldots, 4$. Przedział I_1 nakrywa I_4, bowiem $\mathcal{W}(I_1) = [4, 5.8] \supseteq [4,5] = I_4$, a zatem w grafie wystąpi krawędź skierowana $I_1 \to I_4$. Przedział I_2 nakrywa m.in. sam siebie, więc w grafie wystąpi również pętla $I_2 \to I_2$. Cały A-graf przedstawiony jest na rysunku 2.

*studentka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

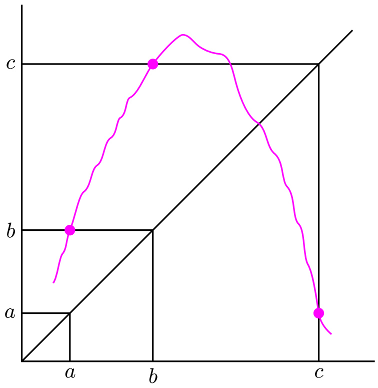
Odpowiemy wreszcie na pytanie zawarte w tytule artykułu: punkty okresowe o okresie k można generować za pomocą *cykli* długości k w A-grafie. Postarajmy się zaagitować, dlaczego tak jest.



Rys. 3. Cykl w A-grafie to ciąg nakładających się przedziałów.

Pomyślmy o cyklu $J_1 \to J_2 \to \ldots \to J_k \to J_1$. Nakrywanie się kolejnych przedziałów jest jak zalewanie „ciągłymi” falami wody (patrz rys. 3). Można uwierzyć, że pewien, być może malutki, przedział kropel $K \subseteq J_1$ wpadnie kolejno do J_2, następnie do J_3, pod koniec do J_k i stanie się z powrotem J_1. Zatem $f^k(K)$ nakryje przedział K – zostanie rozciągnięty i nałożony na siebie. Przypomnijmy następującą własność funkcji ciągłej: musi ona przyjmować wszystkie wartości pośrednie między wartościami na końcach przedziału (jest to własność Darboux). Eureka! Gdy przedział K rozciągniemy i nałożymy na siebie za pomocą f^k, to przekształcenie f^k musi mieć punkt stały wewnątrz K. Ten punkt stały f^k jest jednocześnie poszukiwanym punktem okresowym o okresie k dla f.

Wiemy zatem, że punkty okresowe można wyprodukować z jednego takiego punktu, znajdując cykle w jego A-grafie. Zastosujmy tę technikę, żeby dowieść twierdzenia 1.



Rys. 4. Funkcja z twierdzenia Li–Yorke'a.

Dowód twierdzenia Li–Yorke'a. Załóżmy, że zachodzi przypadek $a < b < c$. W przypadku $a > b > c$ rozumowalibyśmy analogicznie. Niech $K = [a, b]$ i $L = [b, c]$. Spójrzmy na wykres funkcji f. Są na nim punkty $(a, b), (b, c)$ oraz (c, a). Przedział K nakrywa L, a przedział L nakrywa zarówno K, jak i sam siebie (rys. 4). Zatem A-graf powinien mieć przynajmniej następujący kształt:

$$K \rightleftarrows L \circlearrowleft.$$

Tworzymy cykl długości k:

$$\underbrace{L, L, L, \ldots, L}_{k-1}, K,$$

który generuje punkt okresowy o okresie k.

Chwytliwy tytuł i rozpoczynający się „boom na chaos” sprawiły, że praca Li i Yorke'a zyskała duży rozgłos. Dopiero wówczas odkryto wcześniejsze prace ukraińskiego matematyka Aleksandra Szarkowskiego (ur. 1936 r.), które zawierały znacznie mocniejsze twierdzenia. Lecz Szarkowski opublikował swoje wyniki w roku 1964 w mało znanym czasopiśmie ukraińskim, i po ukraińsku, dlatego też nie zostały one dostrzeżone w środowisku matematycznym.

Szarkowski zdefiniował pewien specyficzny porządek, oznaczany $\lhd$, na liczbach naturalnych $\mathbb{N}$, w którym najmniejszą liczbą jest 3, a największą 1:

$$\begin{array}{lllll}
3 & \lhd\ 5 & \lhd\ 7 & \lhd\ 9 & \lhd\ \ldots \\
3\cdot 2 & \lhd\ 5\cdot 2 & \lhd\ 7\cdot 2 & \lhd\ 9\cdot 2 & \lhd\ \ldots \\
3\cdot 2^2 & \lhd\ 5\cdot 2^2 & \lhd\ 7\cdot 2^2 & \lhd\ 9\cdot 2^2 & \lhd\ \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\ldots & \lhd\ 2^3 & \lhd\ 2^2 & \lhd\ 2^1 & \lhd\ 1
\end{array}$$

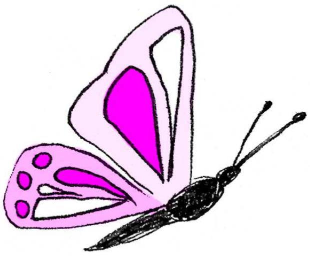
Twierdzenie Szarkowskiego opisuje występowanie punktów okresowych za pomocą tego porządku.

Twierdzenie 3. Niech $f\colon J \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Jeśli f ma punkt okresowy o okresie k oraz $k \lhd l$, to f ma punkt okresowy o okresie l.

Oryginalny dowód podany przez Szarkowskiego był zawiły i wielokrotnie go później upraszczano. Dowód można przeprowadzić za pomocą pojęcia A-grafu: szuka się szczególnej orbity nieparzystej długości, tzw. orbity Stefana, która rozmnoży punkty okresowe w sposób analogiczny, jak w dowodzie twierdzenia Li–Yorke'a. (Ten nietrudny dowód twierdzenia Szarkowskiego znajduje się w *Lecture Notes in Mathematics*, tom 1513, str. 5–23, Springer 1992.) Zauważmy również, że twierdzenie Li–Yorke'a jest trywialnym wnioskiem z twierdzenia Szarkowskiego, mówiącym, że 3 stoi na samym początku porządku.

Rozwiązanie zadania M 1171. Zauważmy najpierw, że z pewnego punktu wychodzą co najmniej 4 odcinki; w przeciwnym razie wszystkich odcinków byłoby co najwyżej $\frac{3\cdot 6}{2} = 9$, a jest ich 10. Oznaczmy więc dane punkty przez A, B, C, D, E, F oraz przyjmijmy, że punkt A jest połączony z punktami B, C, D, E.

Z punktu F wychodzi co najwyżej pięć odcinków, a zatem skoro wszystkich odcinków jest 10, to pewne dwa punkty spośród B, C, D, E muszą być połączone. Punkty te wraz z punktem A dają żądany trójkąt.

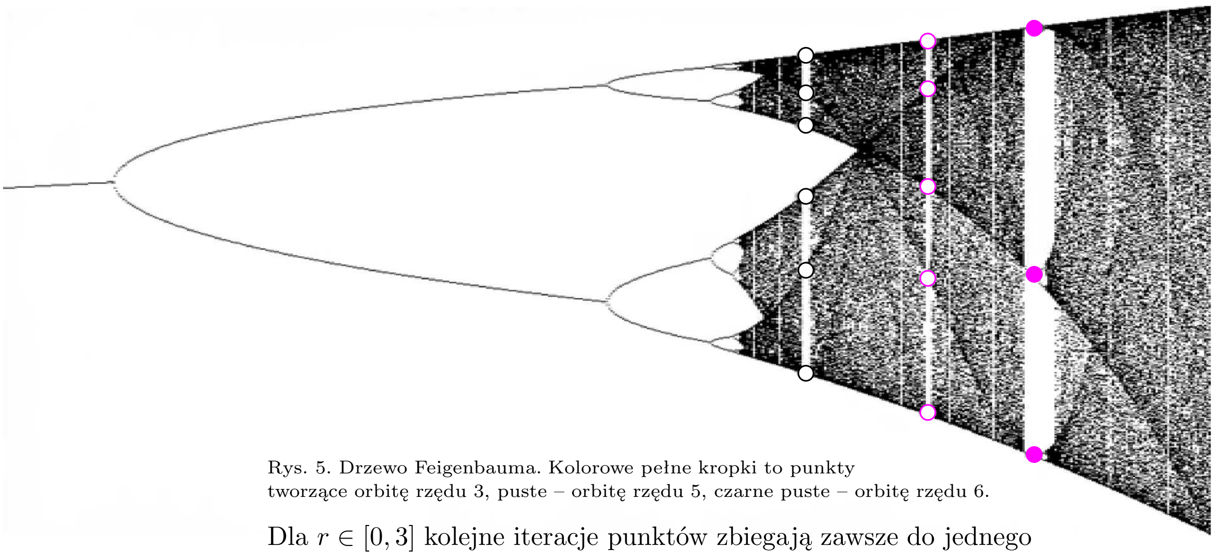


Można się zastanawiać, jak mocne jest twierdzenie Szarkowskiego, tzn. czy występują, być może, jeszcze inne zależności między liczbami punktów okresowych? Okazuje się, że twierdzenie jest najlepsze możliwe: dla każdego n można podać przykład funkcji, która ma punkt okresowy o okresie n, a więc ma też punkty o okresach m „większych” od n ($n \lhd m$), ale nie ma żadnego punktu o okresie m „mniejszym” od n ($m \lhd n$).

Inne ciekawe pytanie to: czy twierdzenie zachodzi w przypadku dwu- i więcej-wymiarowym? Tu odpowiedź jest negatywna. Kontrprzykładem jest obrót na płaszczyźnie o 120° wokół ustalonego punktu. Ma on jeden punkt stały, a wszystkie pozostałe punkty są okresowe o okresie 3.

Jeszcze bardziej fascynującym zdaje się być fakt, że porządek Szarkowskiego pojawia się w innych miejscach w matematyce i chciałoby się nazwać go uniwersalnym, w takim sensie, jak uniwersalne są liczby π lub e. Drzewo Feigenbauma to temat na cały wykład, jednak spróbujmy pokrótce powiedzieć, jak ono powstaje i gdzie w nim widać porządek Szarkowskiego.

Rozpatrzmy rodzinę przekształceń logistycznych $f_r(x) = rx(1-x)$ dla $x \in [0,1]$, indeksowaną współczynnikiem „zgniecenia” paraboli $r \in [0,4]$. Wybieramy punkt dziedziny x_0 i wielokrotnie aplikujemy f_r, otrzymując ciąg punktów $x_n = f_r^n(x_0)$, czyli *trajektorię* punktu x_0. Pytamy, co robi „typowa” trajektoria w nieskończoności, w zależności od r? Naturalnie zatrudniamy komputer do zobrazowania tej zależności: dla ustalonego r zaznaczamy na wykresie punkty typowej trajektorii. Wynik jest przedstawiony na rysunku 5.



Rys. 5. Drzewo Feigenbauma. Kolorowe pełne kropki to punkty tworzące orbitę rzędu 3, puste – orbitę rzędu 5, czarne puste – orbitę rzędu 6.

Dla $r \in [0,3]$ kolejne iteracje punktów zbiegają zawsze do jednego punktu stałego. Dla $r = 3$ następuje podwojenie okresu (to pierwsze rozgałęzienie drzewa), teraz typowa orbita w nieskończoności będzie miała okres 2. Dalej następują kolejne podwojenia okresów, aż do pewnego momentu, gdzie na wykresie robi się bardzo czarno. Dzieją się rzeczy dziwne, chaotyczne.

Przyjrzyjmy się teraz niezakropkowanym fragmentom diagramu, tzw. okienkom, patrząc od prawej do lewej. Największe z okienek przecięte jest w trzech miejscach, więc mamy do czynienia z punktem okresowym o okresie 3. Dalej na lewo widać znacznie węższe okienko przecięte w pięciu miejscach. Jeśli wziąć obraz dużej rozdzielczości, zauważymy okienka odpowiadające okresom nieparzystym: $3, 5, 7, 9, \ldots$. Zobaczymy również przeskok i dalsze okienka przecięte w $3 \cdot 2, 5 \cdot 2, \ldots$ miejscach. Odpowiadają one kolejnym partiom porządku Szarkowskiego. Ostatnią partię, potęgi dwójki, widzimy naturalnie przy zjawisku podwajania okresu $1, 2, 2^2, \ldots$. W tym coś głębszego musi tkwić!

Bardzo ciekawe jest, że dostaliśmy trudne i silne wyniki, nawet uniwersalne, używając prostych pojęć i nie stosując żadnych matematycznych fajerwerków. Podstawowym powodem, dla którego twierdzenie Szarkowskiego zachodzi, jest własność Darboux. Dzięki niej punkty rozmnażają się elegancko, wskakując na cykle.

Rozwiązanie zadania M 1172.
Każda liczba zakończona w systemie dziesiętnym cyframi „10” jest parzysta, lecz niepodzielna przez 4. Wobec tego, gdy rozpatrywany iloczyn kończy się cyframi „10”, dokładnie jeden z czynników $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+d)$, $(d+a)$ rozpatrywanej liczby jest parzysty, pozostałe trzy są nieparzyste. Jednak wtedy liczba

$$(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a) = \\ = 2(a+b+c+d)$$

byłaby liczbą nieparzystą. Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że nie istnieją liczby a, b, c, d spełniające podane w treści zadania warunki.