Ciągi Somosa

Lev KURLYANDCHIK *

W tym artykule zajmiemy się ciągami, które rozważał Michael Somos, badając pewne krzywe eliptyczne.

Przykład 1. Niech będzie dany ciąg (a_n) określony wzorami: $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ oraz

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}a_{n+1} + 1}{a_n} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

Udowodnić, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie. Udowodnimy najpierw, że $\gamma_n = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}}$ jest liczbą naturalną dla każdej liczby naturalnej n.

Po pierwsze mamy $a_4 = 2$, $\gamma_1 = \frac{a_1+a_3}{a_2} = 2$ oraz $\gamma_2 = \frac{a_2+a_4}{a_3} = 3$. Dla $n \geqslant 3$ zachodzi

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_n + \frac{a_{n+1}a_n+1}{a_{n-1}}}{a_{n+1}} = \\ &= \frac{a_na_{n-1} + a_na_{n+1} + 1}{a_{n-1}a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}a_{n-2} + a_na_{n+1}}{a_{n+1}a_{n-1}} = \\ &= \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}} = \gamma_{n-2}.\end{aligned}$$

Dlatego $\gamma_{2k} = \gamma_2 = 3$, $\quad \gamma_{2k+1} = \gamma_1 = 2$. Zatem

$$\frac{a_{2k+2} + a_{2k}}{a_{2k+1}} = 3, \qquad \frac{a_{2k+3} + a_{2k+1}}{a_{2k+2}} = 2,$$

czyli $a_{2k+2} = 3a_{2k+1} - a_{2k}$ i $a_{2k+3} = 2a_{2k+2} - a_{2k+1}$, co kończy dowód dla ciągu a_n.

Przykład 2. Niech (a_n) będzie ciągiem spełniającym warunki: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ oraz

$$a_{n+4} = \frac{a_{n+3}a_{n+1} + a_{n+2}^2}{a_n} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1.$$

Udowodnić, że każdy wyraz ciągu (a_n) jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie. Obliczamy: $a_5 = 2$, $a_6 = 3$, $a_7 = 7$ i $a_8 = 23$. Mamy

$$\mathrm{NWD}(a_m, a_{m-1}) = \mathrm{NWD}(a_m, a_{m-2}) = 1$$

dla $3 \leqslant m \leqslant 8$.

Załóżmy, że $n \geqslant 8$ i wszystkie liczby $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ są całkowite oraz dla $3 \leqslant m \leqslant n$ zachodzą równości:

$$\mathrm{NWD}(a_m, a_{m-1}) = \mathrm{NWD}(a_m, a_{m-2}) = 1.$$

Udowodnimy, że liczba a_{n+1} jest również całkowita oraz zachodzą równości:

$$\mathrm{NWD}(a_{n+1}, a_n) = \mathrm{NWD}(a_{n+1}, a_{n-1}) = 1.$$

Z równości

$$a_{n-3}a_{n-7} = a_{n-4}a_{n-6} + a_{n-5}^2$$

wynika, że

(1) $$a_{n-4}a_{n-6} + a_{n-5}^2 \equiv 0 \pmod{a_{n-3}},$$

a z równości

$$a_{n-2}a_{n-6} = a_{n-3}a_{n-5} + a_{n-4}^2,$$

że

(2) $$a_{n-2}a_{n-6} \equiv a_{n-4}^2 \pmod{a_{n-3}}.$$

Następnie z równości $a_{n-1}a_{n-5} = a_{n-2}a_{n-4} + a_{n-3}^2$ otrzymujemy

(3) $$a_{n-1}a_{n-5} \equiv a_{n-2}a_{n-4} \pmod{a_{n-3}}.$$

Wreszcie z równości $a_na_{n-4} = a_{n-1}a_{n-3} + a_{n-2}^2$ mamy

(4) $$a_na_{n-4} \equiv a_{n-2}^2 \pmod{a_{n-3}}.$$

Korzystając teraz z równości (1)–(4), otrzymujemy

$$\begin{aligned}&a_{n-5}^2a_{n-4}(a_na_{n-2} + a_{n-1}^2) = \\ &\quad = a_{n-5}^2a_{n-2}(a_na_{n-4}) + (a_{n-1}a_{n-5})^2a_{n-4} \equiv \\ &\quad \equiv a_{n-5}^2a_{n-2}a_{n-2}^2 + (a_{n-2}a_{n-4})^2a_{n-4} = \\ &\quad = a_{n-5}^2a_{n-2}^3 + a_{n-2}^2a_{n-4}a_{n-4}^2 \equiv \\ &\quad \equiv a_{n-5}^2a_{n-2}^3 + a_{n-2}^2a_{n-4}(a_{n-2}a_{n-6}) = \\ &\quad = a_{n-2}^3(a_{n-5}^2 + a_{n-4}a_{n-6}) \equiv \\ &\quad \equiv a_{n-2}^3 \cdot 0 \equiv 0 \pmod{a_{n-3}}\end{aligned}$$

Tak więc liczba $a_{n-5}^2a_{n-4}(a_na_{n-2} + a_{n-1}^2)$ jest podzielna przez a_{n-3}. Ponieważ

$$\mathrm{NWD}(a_{n-3}, a_{n-4}) = \mathrm{NWD}(a_{n-3}, a_{n-5}) = 1,$$

więc liczba $a_na_{n-2} + a_{n-1}^2$ jest podzielna przez a_{n-3}, a wobec tego liczba

$$a_{n+1} = \frac{a_na_{n-2} + a_{n-1}^2}{a_{n-3}}$$

jest całkowita.

Pozostaje do wykazania, że

$$\mathrm{NWD}(a_{n+1}, a_n) = \mathrm{NWD}(a_{n+1}, a_{n-1}) = 1.$$

Załóżmy, że $\mathrm{NWD}(a_{n+1}, a_n) > 1$.
Niech p będzie taką liczbą pierwszą, że $p|a_{n+1}$ oraz $p|a_n$.
Z równości

$$a_{n+1}a_{n-3} = a_na_{n-2} + a_{n-1}^2$$

wynika, że $p|a_{n-1}$. Przeczy to jednak warunkowi

$$\mathrm{NWD}(a_n, a_{n-1}) = 1.$$

Przypuśćmy teraz, że $\mathrm{NWD}(a_{n+1}, a_{n-1}) > 1$. Niech p będzie taką liczbą pierwszą, że $p|a_{n+1}$ oraz $p|a_{n-1}$.
Z równości

$$a_{n+1}a_{n-3} = a_na_{n-2} + a_{n-1}^2$$

wynika, że albo $p|a_n$, albo $p|a_{n-2}$. Przeczy to jednak warunkowi

$$\mathrm{NWD}(a_n, a_{n-1}) = \mathrm{NWD}(a_{n-1}, a_{n-2}) = 1.$$

Teza wynika zatem z indukcji.

* Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

Przykład 3. Ciąg (a_n) jest określony wzorami: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$ oraz

$$a_{n+5} = \frac{a_{n+4}a_{n+1} + a_{n+2}a_{n+3}}{a_n} \quad (n \geqslant 1).$$

Udowodnić, że każdy wyraz ciągu (a_n) jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie. Obliczamy: $a_6 = 2,\ a_7 = 3,\ a_8 = 5$ $a_9 = 11$ i $a_{10} = 37$. Zauważmy, że dla $4 \leqslant n \leqslant 10$ zachodzą równości:

$$\begin{aligned}\mathrm{NWD}(a_n, a_{n-1}) &= \mathrm{NWD}(a_n, a_{n-2}) = \\ &= \mathrm{NWD}(a_n, a_{n-3}) = 1.\end{aligned}$$

Za pomocą indukcji udowodnimy, że:
1) każdy wyraz ciągu (a_n) jest liczbą naturalną;
2) dla każdej liczby naturalnej $m \geqslant 4$ zachodzą równości:

$$\begin{aligned}\mathrm{NWD}(a_m, a_{m-1}) &= \mathrm{NWD}(a_m, a_{m-2}) = \\ &= \mathrm{NWD}(a_m, a_{m-3}) = 1.\end{aligned}$$

Niech $n \geqslant 10$ oraz niech wszystkie liczby $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ będą całkowite i spełniają warunek 2). Udowodnimy, że liczba a_{n+1} jest również całkowita oraz spełnia warunek 2).

Z równości $a_n a_{n-5} = a_{n-1}a_{n-4} + a_{n-2}a_{n-3}$ wynika, że

(5) $\quad a_n a_{n-5} \equiv a_{n-2}a_{n-3} \pmod{a_{n-4}}$.

Z równości $a_{n-1}a_{n-6} = a_{n-2}a_{n-5} + a_{n-3}a_{n-4}$ wynika, że

(6) $\quad a_{n-1}a_{n-6} \equiv a_{n-2}a_{n-5} \pmod{a_{n-4}}$.

Z równości $a_{n-2}a_{n-7} = a_{n-3}a_{n-6} + a_{n-4}a_{n-5}$ otrzymujemy

(7) $\quad a_{n-2}a_{n-7} \equiv a_{n-3}a_{n-6} \pmod{a_{n-4}}$.

Następnie z równości $a_{n-3}a_{n-8} = a_{n-4}a_{n-7} + a_{n-5}a_{n-6}$ otrzymujemy

(8) $\quad a_{n-3}a_{n-8} \equiv a_{n-5}a_{n-6} \pmod{a_{n-4}}$.

Wreszcie z równości $a_{n-4}a_{n-9} = a_{n-5}a_{n-8} + a_{n-6}a_{n-7}$ mamy

(9) $\quad a_{n-5}a_{n-8} + a_{n-6}a_{n-7} \equiv 0 \pmod{a_{n-4}}$.

Korzystając teraz z równości (5)–(9), otrzymujemy następujące równości modulo a_{n-4}:

$$\begin{aligned}
&a_{n-5}a_{n-6}a_{n-7}(a_n a_{n-3} + a_{n-1}a_{n-2}) = \\
&= (a_n a_{n-5})a_{n-6}a_{n-7}a_{n-3} + \\
&\qquad + a_{n-5}a_{n-7}a_{n-2}(a_{n-1}a_{n-6}) \equiv \\
&\equiv a_{n-2}a_{n-3}a_{n-6}a_{n-7}a_{n-3} + \\
&\qquad + a_{n-5}a_{n-7}a_{n-2}a_{n-2}a_{n-5} = \\
&= a_{n-2}(a_{n-6}a_{n-7}a_{n-3}^2 + a_{n-5}^2(a_{n-2}a_{n-7})) \equiv \\
&\equiv a_{n-2}(a_{n-6}a_{n-7}a_{n-3}^2 + a_{n-5}^2 a_{n-3}a_{n-6}) = \\
&= a_{n-2}(a_{n-6}a_{n-7}a_{n-3}^2 + (a_{n-5}a_{n-6})a_{n-5}a_{n-3}) \equiv \\
&\equiv a_{n-2}(a_{n-6}a_{n-7}a_{n-3}^2 + a_{n-3}a_{n-8}a_{n-5}a_{n-3}) = \\
&= a_{n-2}a_{n-3}^2(a_{n-6}a_{n-7} + a_{n-5}a_{n-8}) \equiv \\
&\equiv a_{n-2}a_{n-3}^2 \cdot 0 \equiv 0 \pmod{a_{n-4}}.
\end{aligned}$$

Zatem liczba naturalna $a_{n-5}a_{n-6}a_{n-7}(a_n a_{n-3} + a_{n-1}a_{n-2})$ jest podzielna przez liczbę naturalną a_{n-4}.

Ale ponieważ

$$\begin{aligned}\mathrm{NWD}\ (a_{n-4}, a_{n-5}) &= \mathrm{NWD}\ (a_{n-4}, a_{n-6}) = \\ &= \mathrm{NWD}\ (a_{n-4}, a_{n-7}) = 1,\end{aligned}$$

więc a_{n-4} dzieli liczbę

$$a_n a_{n-3} + a_{n-1}a_{n-2},$$

a zatem

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-3} + a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-4}}$$

jest liczbą naturalną.

Z równości rekurencyjnej

$$a_{n-4}a_{n+1} = a_n a_{n-3} + a_{n-1}a_{n-2}$$

wynika, że warunek 2) zachodzi dla liczby $n+1$.

Teza wynika zatem z indukcji.

Po tych przykładach rozpatrzmy ciąg (a_n) określony wzorami: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 1$ oraz

$$a_{n+6} = \frac{a_{n+5}a_{n+1} + a_{n+4}a_{n+2} + a_{n+3}^2}{a_n} \quad (n \geqslant 1).$$

Dalsze początkowe wyrazy tego ciągu to 3, 5, 9, 23, 75, 421, 1103, 5047, 41783, 281527, 2534423, …Dean Hickerson udowodnił, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

Rozważmy kolejny ciąg: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 1$ oraz

$$a_{n+7} = \frac{a_{n+6}a_{n+1} + a_{n+5}a_{n+2} + a_{n+4}a_{n+3}}{a_n} \quad (n \geqslant 1).$$

Dalsze początkowe wyrazy to: 3, 5, 9, 17, 41, 137, 769, 1925, 7203, 34081, 227321, … Raphael Robinson wykazał, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

Idziemy dalej. Następny ciąg to: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 1$ oraz

$$a_{n+8} = \frac{a_{n+7}a_{n+1} + a_{n+6}a_{n+2} + a_{n+5}a_{n+3} + a_{n+4}^2}{a_n} \quad (n \geqslant 1).$$

Dalsze początkowe wyrazy to: 4, 7, 13, 25, 61, 187, 775, 5827, 14815, $\frac{420514}{7}$, czyli osiemnasty wyraz tego ciągu nie jest liczbą całkowitą!

Wreszcie rozpatrzmy ciąg: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 1$ oraz

$$a_{n+9} = \frac{a_{n+8}a_{n+1} + a_{n+7}a_{n+2} + a_{n+6}a_{n+3} + a_{n+5}a_{n+4}}{a_n} \quad (n \geqslant 1);$$

jego dalsze początkowe wyrazy to: 4, 7, 13, 25, 49, 115, 355, 1483, 11137, 27937, $\frac{755098}{7}$. Tym razem dwudziesty wyraz nie jest liczbą całkowitą.

Bibliografia:

[1] D. Gale, *The strange and surprising saga of the Somos sequences*, Math. Intelligencer 13 (1991), 40–42.

[2] J.L. Malouf, *An integer sequence from a rational recursion*, Discrete Mathematics 110 (1992), 257–261.

[3] M. Somos, *Problem 1470*, Crux Mathematicorum, 13 (1989), 208.