Po co matematykowi nieskończoność?

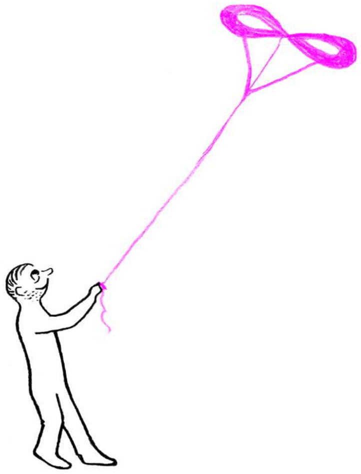
Andrzej BIAŁYNICKI-BIRULA *

Jest to skrócony zapis odczytu wygłoszonego na *Konfrontacjach Matematycznych* w listopadzie 2006.

Najpierw należy odpowiedzieć na pytanie: **co to jest matematyka?** Są dwie odpowiedzi: otwarty, stale uzupełniany, zasób rozumowań, albo nauka poznawcza badająca pewne abstrakcyjne twory przy użyciu rozumowań jako narzędzia badawczego. Pierwsza jest precyzyjna, bo pojęcie *rozumowanie* można zdefiniować. Druga mglista, bo trudno określić, o jakie twory chodzi. Żadna chyba nie jest zadowalająca i prawda pewnie jest gdzieś pośrodku. Matematyka rozumiana jako zasób rozumowań jest w swej istocie skończona. Dotyczy to zarówno syntaktyki (wyrażeń), jak i wnioskowań.

Wyrażenia są skończone i rozumowania też są skończone. Może trochę szkoda, że nie jesteśmy w stanie ogarnąć informacji z nieskończonej liczby danych zawartych w nieskończonej liczbie wyrażeń. Może trochę szkoda, że każde rozumowanie składa się ze skończonego ciągu elementarnych kwantów wnioskowań. Nie ma tu nieskończonych zlepków rozumowań elementarnych, chociaż takimi, ale skończonymi, zlepkami się posługujemy.

Jeśli chodzi o to drugie rozumienie matematyki, to dodajmy, że te abstrakcyjne twory: liczby, figury geometryczne itp. istnieją w naszych umysłach, a nabierają obiektywnego znaczenia przez trudną do wytłumaczenia zgodność ich rozumienia przez poszczególnych ludzi. Wobec tego matematyka może być uważana za naukę poznawczą. Tyle że przedmiotem poznania są nasze wspólne urojenia. Skąd to się bierze, jedni uważają za problem psychologii społecznej, drudzy za problem teologii.



Te matematyczne twory nie są w swej naturze skończone. Żaden twór skończony nie może być przedmiotem badań matematycznych, gdyż poznanie tworu skończonego nie wymaga rozumowania, lecz jedynie sprawdzenia.

Twór matematyczny może być, i często jest, zdefiniowany konstrukcyjnie przez podanie elementów wyjściowych oraz określenie operacji, które w obrębie tego tworu mają być wykonalne. Operacje te mogą mieć różny charakter: przedłużania, rozdrabniania, brania punktów wspólnych. Nasza matematyka uformowana przez nasze doświadczenia, doświadczenia istot średniego rozmiaru, skłania zarówno do nieograniczonego rozdrabniania, jak i nieograniczonego przedłużania. Przy tym operacje te mogą być stosowane jedynie skończoną liczbę razy, ale liczba ta nie jest ograniczona.

Wobec tego badanie takiego tworu można ograniczać do badania jedynie własności skończonych układów. Rozpatrywane tu układy są skończone, ale ich liczebność nie jest i nie może być ograniczona. Jeśli nie wychodzimy poza te ramy, to mamy do czynienia jedynie z potencjalną nieskończonością. Przykładem jest klasyczna teoria liczb i geometria euklidesowa. Wielkie Twierdzenie Fermata dotyczy czteroelementowych układów liczb, twierdzenie Pitagorasa trójelementowych układów punktów. Formalnie chodzi tu o posługiwanie się wyrażeniami ze zmiennymi dla zbiorów skończonych. Nie ma tu mowy o nieskończoności, nie używamy słowa „nieskończony”. Świat, który opisujemy, jest nieskończony, ale do jego opisu używamy jedynie zbiorów skończonych. Taka matematyka układów skończonych, tworzących świat potencjalnie nieskończony, jest już bardzo bogata i można przypuszczać, że wszelkie walory i cała użyteczność matematyki może być w ramach tej matematyki pokazana. Gdyby zatem na tym poprzestać, to na pytanie „po co matematykowi nieskończoność?”, można by odpowiedzieć wymijająco. Nieskończoność – jako pojęcie – nie jest potrzebna, jako brak więzów ograniczających rozmiary badanego świata – jest nieodzowna.

W ramach tej matematyki nie można by jednak formułować globalnych własności rozpatrywanych tworów, to znaczy własności tworów jako całości. Chodzi tu o takie własności, które nie dotyczą i nie wyrażają się przez własności żadnego skończonego układu, ale mogą, na przykład, te własności skończonych układów przybliżać, być granicznym przypadkiem, lub te własności uśredniać.

Rozwiązanie zadania M 1170. Wszystkich niepustych podzbiorów zbioru M jest

$$2^{10} - 1 = 1023.$$

Suma elementów każdego z tych podzbiorów nie przekracza

$$90 + 91 + \ldots + 99 = 945 < 1023.$$

Stąd wynika, że istnieją takie dwa niepuste podzbiory X i Y zbioru M mające taką samą sumę elementów. Tym samym zbiory $A = X \setminus (X \cap Y)$ oraz $B = Y \setminus (X \cap Y)$ są rozłączne i mają taką samą sumę elementów.

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

Rozwiązanie zadania F 691. Indukowana w poruszających się przewodnikach siła elektromotoryczna wynosi

$$\mathcal{E}_{1,2} = I_{1,2}r_{1,2} \mp I_0 R_0.$$

Z prawa Faradaya wiemy, że

$$\mathcal{E}_{1,2} = Blv_{1,2}.$$

Ponieważ $I_0 = I_1 - I_2$, zatem

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R_0 r_1 + R_0 r_2} = $$

$$= Bl\frac{v_1 r_2 - v_2 r_1}{r_1 r_2 + R_0 r_1 + R_0 r_2},$$

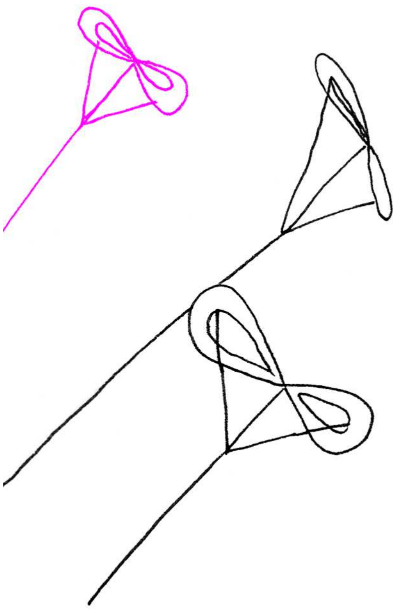
co daje $I_0 = 3{,}6\,\mathrm{mA}$.

To przejście do granicy jest znakiem wyjścia poza ramy matematyki korzystającej jedynie z potencjalnej nieskończoności badanego tworu. Faktycznym obiektem badań stają się nieskończone zbiory jako całości. Formalnie to przejście możemy określić jako dołączenie do zmiennych również tych, które przebiegają zbiory nieskończone. W tej matematyce pojawia się już słowo *nieskończony*.

To rozszerzenie zakresu badań o własności globalne pozwala na wypowiedzenie pewnych własności niewidzialnych z perspektywy żadnego z osobna układu skończonego, ale odnoszących się z pewnym przybliżeniem do własności układów skończonych. Jako przykład weźmy funkcję zeta Riemanna zawierającą informacje o zbiorze wszystkich liczb pierwszych. Matematycy uciekli w ten sposób od trudnych do wysłowienia i uporządkowania badań układów skończonych. Jest to zatem pewien wyraz niemocy, ale takie rozszerzenie zakresu badań okazało się niezwykle owocne, rozszerzyło problematykę i przydało matematyce nowej mocy i blasku. Pojawiły się nowe rozumowania korzystające już z pojęć związanych z nieskończonością. Pozwoliły one rozwiązać wiele otwartych problemów, w tym problemów starej, jedynie potencjalnie nieskończonej matematyki (do której, na przykład, należy Wielkie Twierdzenie Fermata). Czy można by je rozwiązać starymi metodami, niekorzystającymi z nieskończoności? Chyba nie.

W zakres tej rozszerzonej problematyki weszły też badania nad samą nieskończonością. Okazało się, że nie wszystkie nieskończoności liczbowe są takie same i to, co tu najważniejsze, oprócz najłatwiejszej do zrozumienia nieskończoności przeliczalnej można rozważać nieskończoności nieprzeliczalne. Czy nie wystarczyłoby rozważanie jedynie zbiorów przeliczalnych? Formalnie, czy nie wystarczyłoby ograniczenie się do zmiennych, które przebiegają zbiory przeliczalne, by już wypowiedzieć i udowodnić wszystkie podstawowe rezultaty współczesnej matematyki?

W matematyce słowem *nieskończoność* posługujemy się przede wszystkim w znaczeniu liczebności zbioru. W teorii mnogości definiujemy zbiór nieskończony jako ten, który jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym, co jest równoważne temu, że dla każdego zbioru skończonego (to znaczy: który nie jest nieskończony) zawiera podzbiór z nim równoliczny. Oprócz tego podstawowego użycia, nieskończoność występuje w zestawieniach *punkt w nieskończoności, nieskończenie małe otoczenie punktu,* z reguły dla podkreślenia, że mamy do czynienia z sytuacją, w której konstrukcja omawianego obiektu wymagałaby nieskończenie wielu, w sensie liczebności, pewnych standardowych kroków. Jednakże, chociaż w matematyce wszystkie znaczenia słowa *nieskończoność* można sprowadzić do nieskończoności liczbowej, to pierwotne geometryczne intuicje, na przykład *nieskończonej rozciągłości* płaszczyzny, może nie mają liczbowych źródeł. Można jednak nadać im liczbowe uzasadnienia.



Słowo *nieskończony* spotyka się też w teologii. Nie ma ono tam tak ściśle, jak w matematyce, określonego sensu, ale zapewne intuicyjnie ma mieć te same właściwości i wobec tego nieskończoność matematyczna, jeśli jest taka potrzeba, może służyć jako model nieskończoności teologicznej.

Zwykle przy okazji nieskończoności mówi się o bardzo dużych liczbach. Zdajemy sobie jednak sprawę z tego, że pojęcie dużej liczby ma charakter względny. Zależy od skali. Ostatecznie trzy miliardy to tylko trzy, tyle że miliardy. Dla napisania tej liczby wystarczy 3 i potem już same nieznaczące zera. Obiektywne jest tu to, ile cyfr znaczących trzeba napisać, by daną liczbę określić. W naszym codziennym życiu zapewne wystarczyłoby pięć cyfr znaczących, w różnych naukach może należałoby zwiększyć tę liczbę do dziesięciu. Jednak rekordy biją tu banki. Numer w banku zawiera 26 cyfr, ale jest to raczej seria znaczków, a nie liczba. Natomiast w praktycznej, na co dzień używanej kryptografii, w bankach używa się liczb (prawdziwych liczb będących przedmiotem dodawania, mnożenia, itp.) o kilkuset cyfrach znaczących. Tak dużych liczb już w przyrodzie nie ma, wymyślili je sami ludzie. Zresztą nieskończoność też.