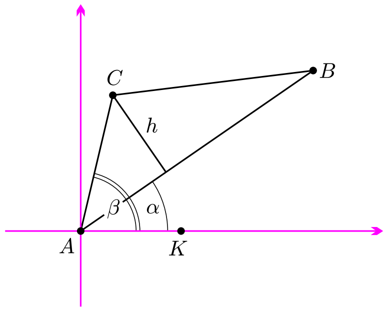
mała delta

O polu wieloboku



Rys. 1

Jak dobrze wiemy ze szkoły podstawowej, pole P trójkąta ABC równe jest połowie iloczynu dowolnej z jego wysokości i długości boku, względem którego wysokość tę wyznaczono. Załóżmy dla uproszczenia, że A znajduje się w początku układu współrzędnych i że współrzędne B oraz C to odpowiednio (x, y) oraz (x', y'). Niech ponadto punkt K ma współrzędne $(1, 0)$, a α i β będą miarami kątów skierowanych KAB oraz KAC.

Wówczas

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot h = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \sin(\beta - \alpha) =$$
$$= \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC|(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) = \frac{1}{2}(xy' - x'y).$$

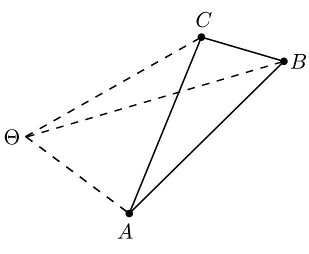
Wyrażenie postaci $xy' - x'y$ jest znane w matematyce i nazywa się *wyznacznikiem macierzy* $\begin{bmatrix} x & y \\ x' & y' \end{bmatrix}$ – oznacza się go często $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$. Umówmy się jednak, że będziemy mówić też o *wyznaczniku pary punktów* $B = (x, y)$ i $C = (x', y')$:

$$\det(B, C) = xy' - x'y.$$

Mamy zatem wzór na pole trójkąta ABC

$$P = \frac{1}{2}\det(B, C). \tag{1}$$

Zauważmy przy tym, że jeśli punkty B i C zamienimy miejscami, to otrzymamy wynik ujemny, czyli wzór (1) daje nam wartość pola trójkąta ABC tylko wtedy, gdy punkty A, B i C ułożone są przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, czyli – jak to zazwyczaj mówimy – *prawoskrętnie*. W przeciwnym zaś przypadku (1) będzie liczbą przeciwną co do wartości do tego pola. Z tego powodu, jeśli wzór (1) pojawia się w szkole średniej, to dodatkowo wstawia się w nim wartość bezwzględną wyznacznika. Nie używając takich sztuczek, zobaczymy, że sytuacja, w której wynik wychodzi ujemny, może być nam na rękę.



Rys. 2

Spróbujmy zatem uwolnić się od założenia o A. Rozpatrzmy trójkąt w położeniu ogólnym i poprowadźmy odcinki łączące jego wierzchołki z Θ, początkiem układu współrzędnych.

Wówczas

$$P_{ABC} = P_{\Theta AB} + P_{\Theta BC} - P_{\Theta AC} = \frac{1}{2}\big(\det(A, B) + \det(B, C) + \det(C, A)\big).$$

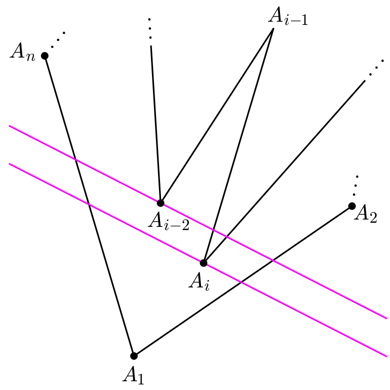
Rozważmy teraz dowolny czworokąt wypukły $ABCD$. Wówczas, oczywiście, pole

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = \\ = \frac{1}{2}(\det(A,B) + \det(B,C) + \det(C,A) + \\ + \det(A,C) + \det(C,D) + \det(D,A)) = \\ = \frac{1}{2}(\det(A,B) + \det(B,C) + \det(C,D) + \det(D,A)),$$

gdyż $\det(C,A) = -\det(A,C)$.

Indukcyjnie dowodzimy, że dla dowolnego wieloboku wypukłego $A_1A_2\ldots A_n$, zachodzi

$$(2) \qquad P_{A_1A_2\ldots A_n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\det(A_j, A_{j+1}) + \det(A_n, A_1)\right).$$



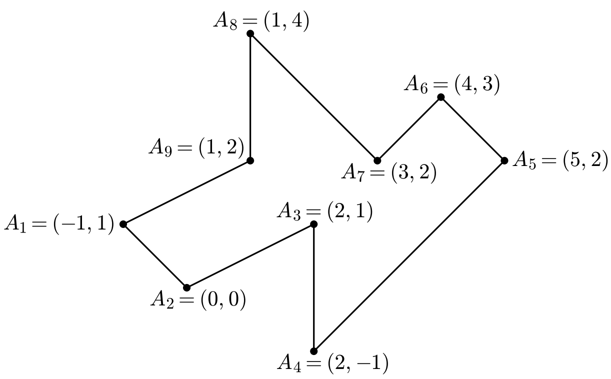
Rys. 3

Wykorzystujemy przy tym fakt, że dowolna przekątna dzieli wielobok na dwa wieloboki o mniejszej liczbie boków.

Nieco więcej zachodu sprawiają wieloboki niewypukłe, bo na pierwszy rzut oka nie widać dlaczego i w tym przypadku znajdziemy przekątną zawartą we wnętrzu wieloboku.

Przenumerujmy wierzchołki wieloboku tak, by kąt przy A_1 był mniejszy niż $180°$. Jeżeli odcinek A_nA_2 zawarty jest we wnętrzu wieloboku, to jest on szukaną przekątną. W przeciwnym przypadku w trójkącie $A_nA_1A_2$ znajdują się jakieś inne wierzchołki wieloboku. Przez każdy z nich poprowadźmy prostą równoległą do prostej A_nA_2. Niech prosta, która znajduje się najbliżej punktu A_1, będzie wyznaczona przez punkt A_i (rys. 3). Wtedy odcinek A_1A_i jest szukaną przekątną całkowicie zawartą we wnętrzu wieloboku. Zatem wzór (2) jest prawdziwy dla dowolnego wieloboku.

Przykład. Obliczmy pole obszaru z rysunku 4.



Rys. 4

Mamy

$$P_{A_1A_2\ldots A_9} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} + \right. \\ + \begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}5 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix} + \\ \left. + \begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\right\} = \\ = \frac{1}{2}(0 + 0 - 4 + 9 + 7 - 1 + 10 - 2 + 3) = \\ = \frac{22}{2} = 11.$$

Studenci kierunków ścisłych poznają ogólny wzór na obliczanie pola powierzchni ograniczonej w miarę porządną krzywą, który – zastosowany do wieloboków – przyjmuje postać (2). Wyprowadzenie tego wzoru wymaga jednak zaawansowanych technik analizy matematycznej. Tutaj wystarczył nam prosty wzór na pole trójkąta...

Małą Deltę przygotował Adam KOLANY

PS. Autor serdecznie dziękuje za cenne uwagi Teresie Kurkowskiej i Dariuszowi Bąkowskiemu.