

OOO	+1
OOR	+1
ORO	+1
ORR	+1
ROO	+1
ROR	-1
RRO	-1
RRR	-3

Jaś i Małgosia grają w orla i reszkę symetryczną monetą. Gdy wypadnie orzeł, Jaś wygrywa złotówkę, w przeciwnym razie złotówkę wygrywa Małgosia. Ze względu na symetrię gra jest sprawiedliwa: średnia wygrana Jasia w każdej turze jest zerowa. Co więcej, jeśli, na przykład, w pewnej chwili Jaś wygrał już 7 złotych, to średni przyrost wygranej w dalszej grze (jeśli gra się ustaloną liczbę tur) jest zerowy, jako że w każdym momencie gra niejako zaczyna się od początku i jej przebieg nie zależy od historii.

Jaś umówił się z Małgosią, że zagrają trzy razy. Postanawia jednak wykorzystać swoją przewagę fizyczną i zakończyć grę, gdy tylko jego łączna wygrana osiągnie 1 zł. Niewiele mu z tego przyjdzie. Jeśli nawet Małgosia nie obrazi się i pozwoli mu realizować opisaną taktykę, Jaś sam dojdzie do wniosku, że średnia wygrana jest nadal zerowa, chociażby wypisując (jak obok) 8 możliwości przebiegu gry.

Być może Jaś dowie się na studiach (zapewne z pożyczonych notatek Małgosi), że miał do czynienia z procesem stochastycznym zwanym martynałem, czyli ciągiem zmiennych losowych (X_n) o następującej własności:

$$E(X_{n+1}|X_n, \dots, X_0) = X_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Definicja martynału wymaga pojęcia warunkowej wartości oczekiwanej. Sens intuicyjny jest taki: jeśli znam historię procesu do chwili n , a w szczególności wiem, że wygrałem już X_n złotych, to moja średnia wygrana w chwili $n + 1$ będzie równa X_n (czyli średni przyrost wygranej będzie zerowy). Definicję tę można uważać za formalizację pojęcia gry sprawiedliwej. Zwróćmy uwagę, że z definicji martynału wynika, iż

$$EX_{n+1} = E(E(X_{n+1}|X_n, \dots, X_0)) = EX_n.$$

Taktyka Jasia polegała na zastopowaniu martynału w chwili, gdy albo wygra 1 zł, albo rozegra umówione trzy tury. Wniosek z podstawowego twierdzenia teorii martynałów – twierdzenia Dooba – mówi, że gdy moment stopu jest ograniczony, to średnia wygrana pozostanie w dalszym ciągu równa wielkości EX_n , niezależnej, jak stwierdziliśmy, od n .

Moment stopu nie może być dowolną zmienną losową. Musi on odpowiadać taktyce dającej się zrealizować. Na przykład taktyka, polegająca na wycofaniu się z gry, gdy wygrana osiągnie globalne maksimum, jest doskonała, ale wymagałaby przewidywania przyszłości.

Jeśli czas gry jest nieograniczony, to wygrana Jasia z prawdopodobieństwem 1 osiągnie dowolną wartość (np. 1000000 zł). Niestety, średni czas oczekiwania na tę chwilę jest nieskończony. Jaś musiałby mieć zatem nieograniczony kapitał (lub kredyt).

Słowo „martynał” pochodzi prawdopodobnie od miejscowości Martigues w Prowansji. Według niektórych źródeł, mieszkańcy Martigues oddawali się z upodobaniem grom hazardowym. Przypisuje im się metodę gry, zwaną *martingale* i polegającą na podwajaniu stawki po każdej przegranej. Łatwo stwierdzić, że gwarantuje to wygraną równą jednej stawce średnio w dwóch turach, ale też wymaga – średnio – nieskończonego kapitału. Istotnie, wygrana w k -tej turze jest równa $-1 - 2 - 2^2 - \dots - 2^{k-1} + 2^k = 1$, angażuje kapitał $2^k - 1$ z prawdopodobieństwem 2^{-k} , czyli niezbędny kapitał wynosi średnio

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} (2^k - 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2^{-k}) = +\infty.$$

Ponadto z ogólnej teorii wynika, że każda metoda obstawiania przeksztalca martynał w martynał, więc niewielka z niej korzyść.

Martingale po angielsku i francusku oznacza także element uprzęży końskiej: rzemień łączący popręg z nachrapnikiem, munsztukiem lub wędzidłem. Dzięki niemu koń nie podrzuca łbem podczas biegu. Jeden z twórców teorii, Joseph Doob, sfotografował się nawet z takim martynałem.

Czytelnik może się sfotografować z całkiem sensownym modelem fizycznym martynału. Wystarczy pojechać do Barcelony. W podziemiach bazyliki *La Sagrada Familia* jest wystawa szkiców i modeli, wykonanych przez jej twórcę, Gaudiego, między innymi zrównoważony układ ciężarków, rozpięty na szkielecie w kształcie drzewa (na ten przykład martynału zwrócił mi uwagę prof. Stanisław Kwapien). W następnym odcinku spróbujemy zdefiniować momenty stopu i udowodnić twierdzenie Dooba za pomocą takiego właśnie modelu.