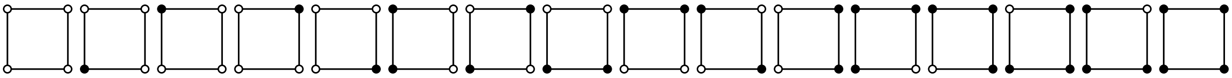
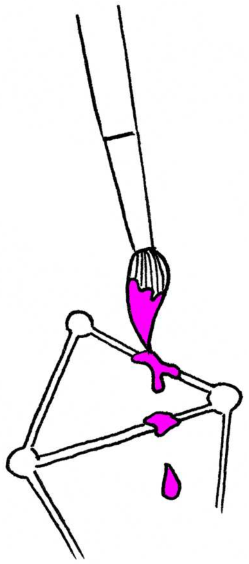
Kolorowanie wierzchołków kwadratu i sześcianu

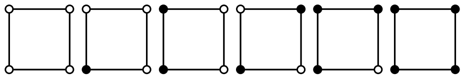
Wojciech GUZICKI[*]

Przykład 1. Wierzchołki kwadratu można dwoma kolorami pokolorować na 16 różnych sposobów:

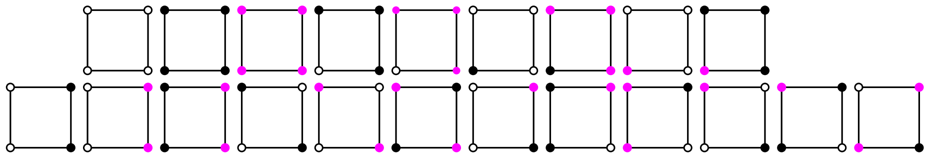




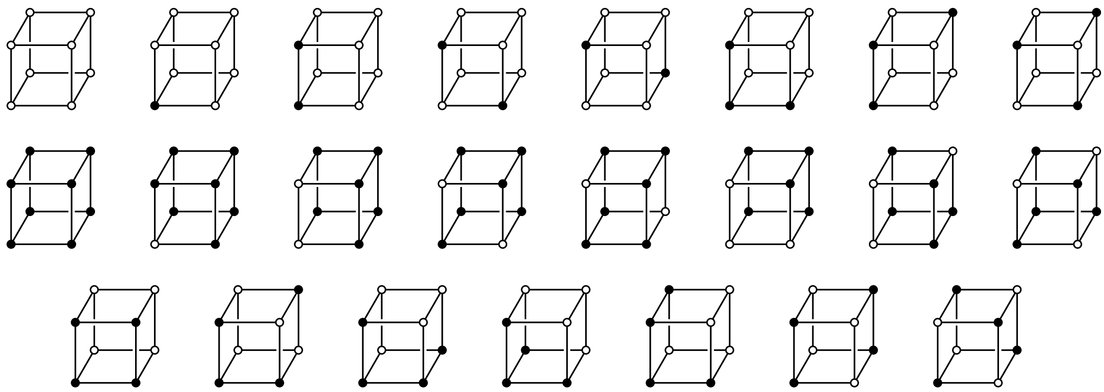
Przykład 2. Gdy za geometrycznie nierozróżnialne uznamy te pokolorowania, które różnią się jedynie położeniem kwadratu, czyli takie, dla których istnieje izometria kwadratu nakładająca jedno z nich na drugie (np. obrót o $90°$ nakłada drugie na trzecie narysowane wyżej pokolorowanie), to geometrycznie rozróżnialnych pokolorowań dwoma kolorami będzie 6.



Przykład 3. Używając trzech kolorów, można pokolorować wierzchołki kwadratu na 21 geometrycznie rozróżnialnych sposobów.



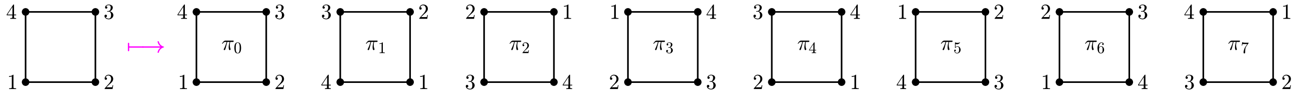
Przykład 4. Fizycznie realizowalne izometrie sześcianu, nakładające go na siebie, to jedynie obroty. Istnieją 23 fizycznie rozróżnialne pokolorowania wierzchołków sześcianu dwoma kolorami.



Izometrie sześcianu to jednak nie tylko obroty, lecz także symetrie. Dlatego też geometrycznie rozróżnialnych pokolorowań wierzchołków sześcianu jest mniej: 22. Pozostawiamy Czytelnikowi odnalezienie na rysunku tej pary pokolorowań, które fizycznie się różnią, lecz geometrycznie – nie.

Widzimy więc, że liczba rozróżnialnych pokolorowań zależy od tego, jak określimy nierozróżnialność pokolorowań. Dogodnie jest używać tu terminologii algebraicznej.

Zajmować się będziemy tylko przekształceniami zbiorów skończonych. *Grupą przekształceń* zbioru X na niego samego nazywamy taki (niepusty) ich zbiór G, że wraz z dwoma przekształceniami α i β należą do niego ich złożenie $\beta \circ \alpha$ i przekształcenia odwrotne α^{-1}, β^{-1}. Największa grupa przekształceń zbioru X to grupa jego *permutacji*, wszystkie inne są w niej zawarte (są jej *podgrupami*). Każda permutacja daje się przedstawić jako suma cykli – pisząc $(1,2,3)$, będziemy mieli na myśli cykliczną zamianę 1 na 2, 2 na 3 i 3 na 1. Oto rozkład na cykle wszystkich ośmiu elementów grupy przekształceń wierzchołków kwadratu na siebie:



$(1)(2)(3)(4)$ $(1,2,3,4)$ $(1,3)(2,4)$ $(1,4,3,2)$ $(1,2)(3,4)$ $(1,4)(2,3)$ $(1)(2,4)(3)$ $(1,3)(2)(4)$

[*]Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

Jeśli G jest pewną grupą przekształceń zbioru X oraz $x \in X$, to zbiór

$$O(x) := \{\pi(x) : \ \pi \in G\}$$

nazywamy *orbitą* x (ze względu na G). Z kolei *charakterem* przekształcenia π nazywamy liczbę jego punktów stałych w X:

$$\chi(\pi) = |\{x \in X : \ \pi(x) = x\}|.$$

Symbol $|X|$ oznacza liczbę elementów zbioru X. Ponieważ rozpatrujemy tylko zbiory skończone, więc jest to liczba naturalna.

Przyjmiemy bez dowodu następujący fakt, wiążący te pojęcia.

Lemat Burnside'a. Liczba orbit $t(G)$ w zbiorze X ze względu na grupę G jest równa

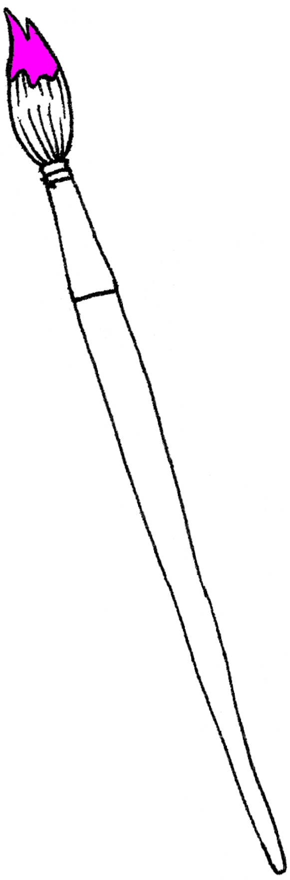
$$\frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \chi(\pi).$$

Tyle o narzędziach. Powróćmy do sprawy kolorowań.

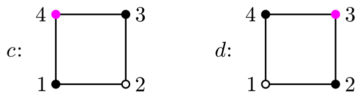
Niech będzie dany zbiór skończony A. *Kolorowaniem* zbioru A nazwiemy dowolną funkcję $c : \ A \to \{1, \dots k\}$. Mówimy też wtedy, że elementy zbioru A kolorujemy za pomocą k kolorów (nawet jeśli nie wszystkie kolory zostały użyte). Niech K będzie zbiorem wszystkich kolorowań zbioru A za pomocą k kolorów. Przypuśćmy następnie, że dana jest pewna grupa G przekształceń zbioru A na siebie – za jej pomocą definiujemy teraz grupę G^* przekształceń zbioru K. Dla dowolnego przekształcenia $\pi \in G$ definiujemy przekształcenie $\pi^* : \ K \to K$ wzorem $\pi^*(c) := c \circ \pi^{-1}$. Wreszcie przyjmujemy $G^* := \{\pi^* : \ \pi \in G\}$.

Ćwiczenie. Udowodnić, że jeśli $k \geqslant 2$, $\pi, \sigma \in G$ oraz $\pi \neq \sigma$, to $\pi^* \neq \sigma^*$. W szczególności, że $|G^*| = |G|$.

Mówimy teraz, że dwa kolorowania c i d zbioru A są nierozróżnialne (ze względu na grupę G), jeśli istnieje takie przekształcenie $\pi \in G$, że $\pi^*(c) = d$.



Przykład 5. Popatrzmy na następujące dwa kolorowania kwadratu, c i d (dla łatwiejszego zapisu umówmy się, że kolorowi białemu odpowiada liczba 1, niebieskiemu 2 i czarnemu 3 – są to więc kolorowania $\{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$).



Zauważmy, że kolorowanie d powstało przez to „obrócenie" kolorowania c, które nazwaliśmy π_3. Sprawdzimy, że rzeczywiście $d = \pi_3^*(c)$. Mianowicie

$$\begin{aligned}
\pi_3^*(c)(1) &= c(\pi_3^{-1}(1)) = c(2) = 1 = d(1),\\
\pi_3^*(c)(2) &= c(\pi_3^{-1}(2)) = c(3) = 3 = d(2),\\
\pi_3^*(c)(3) &= c(\pi_3^{-1}(3)) = c(4) = 2 = d(3),\\
\pi_3^*(c)(4) &= c(\pi_3^{-1}(4)) = c(1) = 3 = d(4).
\end{aligned}$$

Przypuśćmy teraz, że dany jest zbiór A i pewna grupa jego przekształceń. Rozważmy zbiór K kolorowań zbioru A za pomocą k kolorów i grupę G^* przekształceń zbioru K. Wówczas liczba orbit grupy G^* jest równa

$$t(G^*) = \frac{1}{|G^*|} \cdot \sum_{\sigma \in G^*} \chi(\sigma) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \chi(\pi^*).$$

Dla dowolnego przekształcenia $\pi \in G$ chcemy obliczyć $\chi(\pi^*)$. Przypuśćmy zatem, że $c \in K$. Zauważmy, że następujące warunki są równoważne:

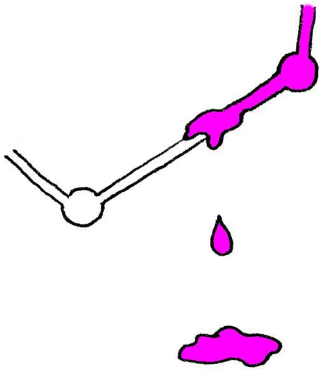
$$\pi^*(c) = c,$$

$$c \circ \pi^{-1} = c,$$

$$c = c \circ \pi$$

$$\forall a \in A \ (c(\pi(a)) = c(a)).$$

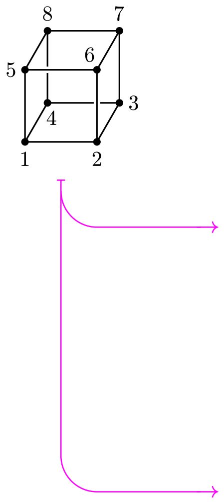
Ostatni warunek jest równoważny temu, że wszystkie elementy tego samego cyklu (w rozkładzie permutacji π na cykle) są pokolorowane tym samym kolorem.



Zatem, jeśli $z(\pi)$ oznacza liczbę cykli permutacji π, to
$$\chi(\pi^*) = k^{z(\pi)}.$$
Stąd otrzymujemy wzór na liczbę rozróżnialnych kolorowań – jest to przecież liczba orbit w K względem G^*:
$$t(G^*) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} k^{z(\pi)}.$$

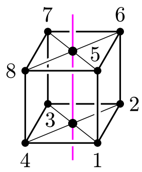
Wniosek 1. Liczba cykli ośmiu izometrii kwadratu (patrz strona 1) to odpowiednio
$$4, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 3.$$
Zatem liczba geometrycznie rozróżnialnych kolorowań wierzchołków kwadratu za pomocą k kolorów jest równa
$$\frac{1}{8}(k^4 + k + k^2 + k + k^2 + k^2 + k^3 + k^3) = \frac{1}{8}(k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k).$$
I (proszę sprawdzić) dla $k = 2$ otrzymujemy 6, a dla $k = 3$ mamy 21 rozróżnialnych geometrycznie kolorowań, co obliczyliśmy już poprzednio „na piechotę”. Ale teraz możemy obliczyć liczbę rozróżnialnych kolorowań dla dowolnej liczby kolorów!

Aby wyprowadzić analogiczny wzór na liczbę fizycznie rozróżnialnych kolorowań wierzchołków sześcianu, musimy przyjrzeć się jego grupie obrotów (czyli fizycznie realizowalnych izometrii).

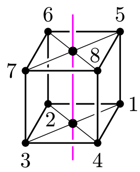


Grupa ta składa się z 24 obrotów. Pierwszym z nich jest identyczność – oczywiście ma ona osiem cykli: (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8).

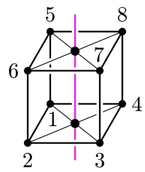
Następnie mamy 3 obroty wokół osi przechodzącej przez środki przeciwległych ścian (są trzy takie osie).



obrót o 90°: $(1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)$

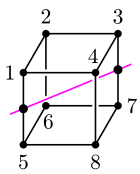


obrót o 180°: $(1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8)$

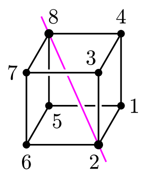


obrót o 270°: $(1, 4, 3, 2)(5, 8, 7, 6)$

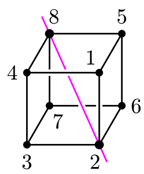
Z kolei mamy obrót wokół osi przechodzącej przez środki przeciwległych krawędzi (jest 6 takich osi) i 2 obroty wokół osi przechodzącej przez przeciwległe wierzchołki (są 4 takie osie).



obrót o 180°: $(1, 5)(2, 8)(3, 7)(4, 6)$



obrót o 120°: $(1, 3, 6)(2)(4, 7, 5)(8)$



obrót o 240°: $(1, 6, 3)(2)(4, 5, 7)(8)$

Wniosek 2. Dla realizowalnych fizycznie izometrii sześcianu mamy zatem jedną permutację o 8 cyklach, 6 permutacji o 2 cyklach i 17 permutacji o 4 cyklach. Stąd wynika, że liczba fizycznie rozróżnialnych kolorowań sześcianu k kolorami jest równa
$$\frac{1}{24}(k^8 + 17k^4 + 6k^2),$$
co dla $k = 2$ daje 23 (to już poprzednio ustaliliśmy), a np. dla $k = 3$ mamy 333.

Wniosek 3. Grupa wszystkich izometrii sześcianu składa się z 48 izometrii. Wśród tych permutacji zbioru wierzchołków jedna permutacja ma 8 cykli, 6 ma 6 cykli, 21 ma 4 cykle i 20 ma 2 cykle. Zatem liczba kolorowań geometrycznie rozróżnialnych jest równa
$$\frac{1}{48}(k^8 + 6k^6 + 21k^4 + 20k^2),$$
co dla $k = 2$ daje 22 kolorowania (to też ustaliliśmy), a np. dla $k = 3$ daje ich 267.