Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2007

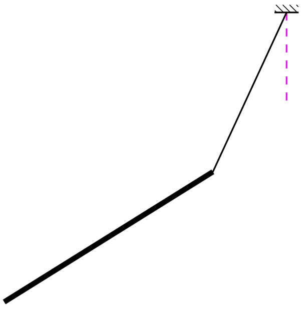
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 438, 439

Redaguje Jerzy B. BROJAN

438. Jednorodny pręt wisi na bardzo lekkiej nici, której drugi koniec jest zaczepiony w nieruchomym punkcie. Wprowadzono pręt w ruch obrotowy wokół osi pionowej przechodzącej przez ten punkt, tak że w obracającym się układzie odniesienia pozostawał nieruchomy. Czy możliwe jest, że przy pewnej prędkości kątowej obrotu załączony rysunek dokładnie przedstawia położenie pręta? (Należy zmierzyć na rysunku niezbędne wielkości)



439. W fizyce jądrowej, a także w przemyśle elektronicznym, bardzo poszukiwany jest ołów wydobyty z rud w odległej historii (np. starożytności i średniowieczu). Jakie zalety może mieć taki ołów w porównaniu z „normalnym”, tzn. pochodzącym ze współczesnego procesu wydobycia i oczyszczania?

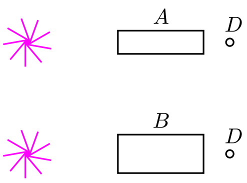
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
428 ($WT = 3{,}10$) i **429** ($WT = 1{,}78$)
z numeru 12/2006

Tomasz Tkocz	– Rybnik	40,79
Konrad Kapcia	– Częstochowa	38,99
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	35,00
Tomasz Wietecha	– Tarnów	31,64
Jerzy Witkowski	– Radlin	28,91
Krzysztof Magiera	– Łosiów	28,26
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	20,26
Jacek Konieczny	– Poznań	18,39

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2007

Przypominamy treść zadań:

430. Oto fragment artykułu z gazety codziennej, dotyczący możliwości bezpośredniej obserwacji planet pozasłonecznych metodą zasłonięcia gwiazdy (której światło jest znacznie silniejsze): *... satelita... rozwinie parasol o średnicy 30–50 m, który posłuży za przesłonę dla teleskopu. Żeby skutecznie wyeliminować światło gwiazdy docierające z odległości kilkudziesięciu lat świetlnych i równocześnie umożliwić obserwację układu planetarnego tej gwiazdy, przesłona musi znajdować się kilkadziesiąt tysięcy kilometrów przed teleskopem.*
Skąd wynikają podane wyżej wartości średnicy przesłony i jej odległości? Czy nie mogłaby być ona np. 10 razy mniejsza i znajdować się odpowiednio bliżej? Przyjąć, że układ planetarny jest podobny do Układu Słonecznego, a obserwowany jest w świetle widzialnym.



431. Na osi betonowego walca A w dużej odległości od niego znajduje się małe źródło promieniowania gamma, a za walcem znajduje się detektor promieniowania D. Drugi z narysowanych układów różni się od pierwszego tylko większą grubością walca B. Okazało się, że natężenia promieniowania zmierzone przez detektory nie były jednakowe. Który z detektorów wskazywał większe natężenie promieniowania i dlaczego?

430. Średnica kątowa gwiazdy wielkości Słońca odległej o 50 lat świetlnych (czyli ok. $5\cdot 10^{14}$ km) wynosi

$$1{,}4\cdot 10^6/5\cdot 10^{14}\,\text{rad} \approx 3\cdot 10^{-9}\,\text{rad},$$

zaś analogiczna średnica kątowa orbity „Ziemi” (planety krążącej po orbicie o promieniu równym promieniowi orbity Ziemi) wynosiłaby ok. $3\cdot 10^{-7}$ rad. Natomiast średnica kątowa przesłony $\alpha = d/R$ (d – średnica przesłony, R – odległość do niej) wynosi wg cytowanego artykułu ok. 10^{-6} rad. Zatem obserwacja „Ziemi” jest wykluczona, ale obserwacja „Jowisza” (krążącego kilkakrotnie dalej od macierzystej planety) – owszem.

Ponadto należy wziąć pod uwagę efekty dyfrakcji na przesłonie. Jeśli ma ona skutecznie zasłaniać cokolwiek, to kąt dyfrakcji λ/d musi być znacznie mniejszy od średnicy kątowej α: $\frac{\lambda}{d} \ll \frac{d}{R}$, tzn. $d^2 \gg \lambda R$. Podstawiając $R \approx 50\,000$ km i $\lambda = 5\cdot 10^{-7}$ m, otrzymujemy $d \gg 5$ m. Widać, że dyfrakcja nie pozwala na zmniejszenie rozmiarów przeszkody – przy dziesięciokrotnie mniejszej przeszkodzie musiałaby być ona 100 razy bliżej, a wtedy zasłoniłaby nie tylko „Jowisza”, ale wszystkie planety (może z wyjątkiem „Neptuna” i „Plutona”).

Jeśli przesłona ma działać efektywnie na całej szerokości wiązki, to jej średnica musi być wyraźnie większa od apertury (średnicy wejściowej) teleskopu. Wobec podanych wyżej wartości liczbowych warunek ten nie jest dodatkowym ograniczeniem nawet dla największych istniejących teleskopów pojedynczych, natomiast mógłby wykluczyć zastosowanie kilku połączonych teleskopów (tzw. synteza apertury).

431. Promieniowanie gamma jest w materii nie tylko pochłaniane, ale i rozpraszane. Z cienkiego walca rozproszone kwanty γ wylatują przez ściany boczne, a w grubym istnieje pewne prawdopodobieństwo rozproszenia wielokrotnego, w wyniku czego kwant może jednak trafić do detektora. Większe jest wskazanie detektora za walcem B.

Klub 44

Zadania z matematyki nr 541, 542

Redaguje Marcin E. KUCZMA

541. Mając daną dodatnią liczbę całkowitą (w zapisie dziesiętnym), możemy dopisać na końcu 0 lub 4 (otrzymując liczbę mającą o jedną cyfrę więcej); ponadto, jeśli dana liczba jest parzysta, wolno nam podzielić ją przez 2. Dowieść, że startując od liczby 4 i wykonując opisane operacje, można uzyskać każdą liczbę całkowitą dodatnią.

542. Cztery okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 o jednakowym promieniu i różnych środkach są położone na płaszczyźnie tak, że o_1, o_2, o_3 mają punkt wspólny A, zaś o_2, o_3, o_4 mają punkt wspólny B, różny od A. Wykazać, że punkty przecięcia tych okręgów, różne od A i B, są wierzchołkami równoległoboku.

Zadanie 542 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2007

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **525** ($WT = 2{,}24$) i **526** ($WT = 1{,}75$) z numeru 9/2006

Jerzy Cisło	– Wrocław	47,70
Piotr Kumor	– Olsztyn	42,83
Michał Jastrzębski	– Warszawa	42,27
Krzysztof Dorobisz	– Kraków	40,36
Łukasz Garncarek	– Opole	39,94
Tomasz Wietecha	– Tarnów	35,94
Krzysztof Kamiński	– Pabianice	35,52
Dariusz Kurpiel	– Posada Zarszyn	34,82

I znów na czele listy dwa bardzo dobrze znane nazwiska. Jerzy Cisło zamyka swoją piątą rundę. A rzut oka na dalszy ciąg tabeli pozwala oczekiwać w nieodległej przyszłości gromadnego przekraczania „linii 44".

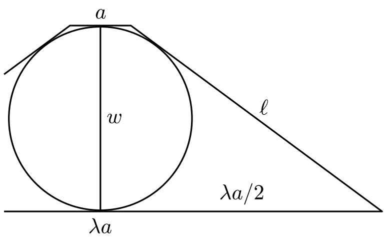
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2007

Przypominamy treść zadań:

533. Ostrosłup ścięty prawidłowy ma kulę wpisaną (styczną do wszystkich ścian) oraz kulę półwpisaną (styczną do wszystkich krawędzi). Wyznaczyć liczbę wierzchołków oraz skalę podobieństwa podstaw ostrosłupa.

534. Czy istnieje taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wykres funkcji $f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n-krotnej iteracji funkcji f) przechodzi przez dokładnie n punktów kratowych (tj. punktów o obu współrzędnych całkowitych)?

533. Przypuśćmy, że podstawy są n-kątami foremnymi, podobnymi w skali $\lambda > 1$. Niech a będzie długością krawędzi mniejszej podstawy, a r promieniem koła w nią wpisanego; przez ℓ oznaczmy długość krawędzi bocznej ostrosłupa, a przez w wysokość ściany bocznej.



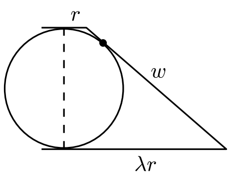
Ta ściana jest trapezem o bokach a, ℓ, λa, ℓ, więc

(1) $$\ell^2 = w^2 + (\lambda - 1)^2 \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Istnieje koło wpisane w ów trapez (ślad kuli półwpisanej w wielościan), a zatem

(2) $$2\ell = (\lambda + 1)a.$$

Weźmy pod uwagę przekrój ostrosłupa półpłaszczyzną, której krawędzią jest prosta przechodząca przez środki podstaw i która prostopadle połowi jedną ze ścian bocznych.



Punkt styczności kuli wpisanej z tą ścianą dzieli jej wysokość na odcinki o długościach r i λr, wobec czego

(3) $$w = (\lambda + 1)r.$$

Podstawiając wartości (2) i (3) do równania (1), otrzymujemy zależność

(4) $$a^2 = 4r^2 + \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right)^2 a^2,$$

z której wynika, że $a > 2r$. Jedynym wielokątem foremnym o boku dłuższym niż średnica koła wpisanego jest trójkąt równoboczny. Tak więc $n = 3$, $a^2 = 12r^2$, i z równania (4) wyznaczamy skalę podobieństwa

$$\lambda = 5 + 2\sqrt{6}.$$

534. Istnieją takie funkcje. Oto przykład. Ustalmy liczbę niewymierną α oraz liczbę rzeczywistą β, która nie jest całkowita ani nie jest całkowitą wielokrotnością liczby α. Określamy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorami:

$$\begin{aligned} &f(1) = f(\alpha) = 1; \\ &f(k+1) = f((k+1)\alpha) = k\alpha \quad && \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots; \\ &f(x) = \beta && \text{dla innych } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(w szczególności $f(\beta) = \beta$). Szukamy punktów kratowych na wykresie funkcji f^n (tym symbolem będziemy oznaczać n-krotną iterację funkcji f); to znaczy, pytamy: dla jakich liczb całkowitych m wartość $f^n(m)$ jest liczbą całkowitą?

Jeśli $m \leqslant 0$, to $f(m) = \beta$, i dalej $f^2(m) = f^3(m) = \ldots = \beta$; jest to wartość niecałkowita.

Dla $m = 1$ mamy $f(1) = 1$, i dalej $f^2(1) = f^3(1) = \ldots = 1$; wartość całkowita.

Dla liczb całkowitych $m > 1$ mamy

$$\begin{aligned} f(m) &= (m-1)\alpha, \\ f^2(m) &= (m-2)\alpha, \ \ \ldots, \\ f^{m-1}(m) &= \alpha \end{aligned}$$

(wartości niecałkowite), po czym $f^m(m) = 1$, i dalej

$$f^{m+1}(m) = f^{m+2}(m) = \ldots = 1;$$

wartość całkowita.

Reasumując: dla liczb całkowitych m, n $(n > 0)$ zachodzi równoważność

$$f^n(m) \text{ jest liczbą całkowitą} \iff m \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

To znaczy, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wykres funkcji f^n przechodzi przez dokładnie n punktów kratowych.