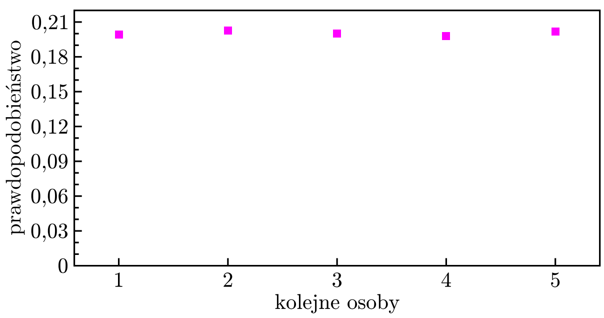
Złośliwy marynarz

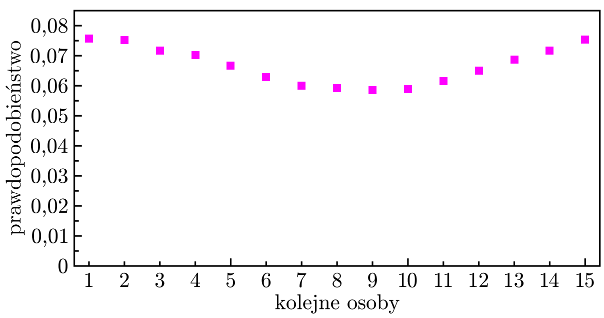
Tomasz FRÜBOES[*]

O grze w marynarza słyszeli zapewne wszyscy. Gra może być bardzo pomocna w sytuacjach, w których potrzebujemy wybrać jedną osobę z wielu – wystarczy grupa, w której nie wiadomo, kto ma zmywać po posiłku, zjeść ostatni kawałek czekolady, czy pójść wyrzucić śmieci. Gra ta wydaje się wtedy sprawiedliwym, a przy tym prostym sposobem rozwiązania problemu. Nie jest ona jednak tak sprawiedliwa, jakby się mogło zdawać.

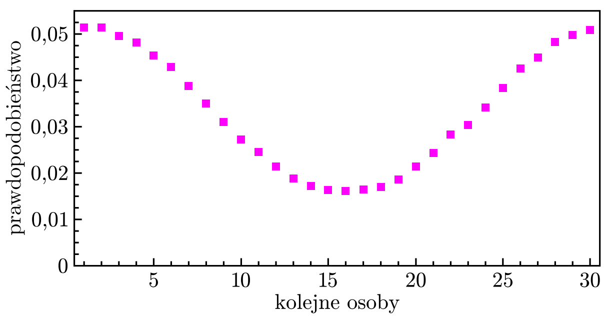
Aby się o tym przekonać, przypomnijmy sobie szybko zasady gry – każda z n osób uczestniczących w zabawie pokazuje pewną (losową) liczbę X_i (i jest numerem osoby) z ustalonego zakresu. Wskazanie liczby przez gracza polega zwykle na pokazaniu odpowiedniej liczby palców. Wylosowane liczby są następnie sumowane ($S_n = \sum X_i$), po czym jedna z osób odlicza kolejno („w kółko") uczestników gry aż do pojawienia się otrzymanej liczby S_n. W wyniku tej operacji wybrana zostaje k-ta osoba. Warto zauważyć, że opisana procedura tak naprawdę sprowadza się do brania reszty z dzielenia przez n – wybrana zostaje osoba o numerze k równym $S_n \bmod n$ (co oznacza tę właśnie resztę).



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Wydawać by się mogło, że gra jest doskonale sprawiedliwa – w końcu każdy z uczestników niezależnie podaje swoją liczbę. Tak jednak nie jest – można się o tym przekonać, przyglądając się rysunkom 1–3. Przedstawiają one prawdopodobieństwo wybrania k-tej osoby w grach (czyli rozkład prawdopodobieństwa zmiennej k), w których uczestniczy 5, 15 lub 30 osób i w której losowane są liczby z zakresu od 1 do 5. O ile dla 5 osób rozkład prawdopodobieństwa zmiennej k jest idealnie płaski, o tyle dla większej liczby uczestników w rozkładzie pojawia się centralnie umieszczone minimum.

W wytłumaczeniu tego dziwnego, jak by się zdawać mogło, zjawiska może pomóc jedno z ważnych twierdzeń matematycznych, tj. centralne twierdzenie graniczne. W najprostszej postaci mówi ono, że dla $X_1, X_2, \ldots, X_n$ niezależnych zmiennych losowych o takich samych rozkładach prawdopodobieństwa (czyli z ustaloną wartością oczekiwaną μ i odchyleniem standardowym σ) suma rozkładów $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ będzie miała wartość oczekiwaną $n\mu$ i odchylenie standardowe $\sigma\sqrt{n}$. Co więcej, dla odpowiednio dużych n rozkład S_n dąży do rozkładu Gaussa. W naszym przypadku X_i oznacza rozkład prawdopodobieństwa pokazania pewnej liczby palców przez i-tego uczestnika gry. Zakładamy tutaj, że X_i są rozkładami płaskimi (tzn. prawdopodobieństwa pokazania konkretnej liczby palców przez danego gracza są równe).

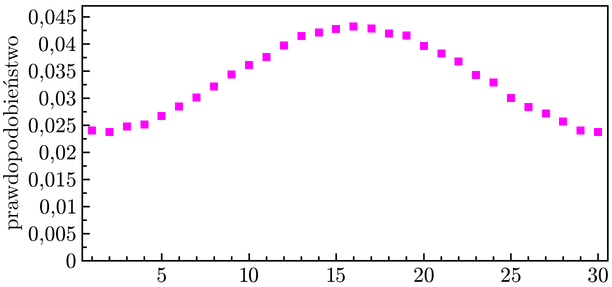
Z podanego wcześniej twierdzenia wynika, że rozkład otrzymanej liczby S_n dla odpowiednio dużej liczby uczestników opisywany będzie rozkładem Gaussa. Szerokość w połowie wysokości, równą $2{,}35\sigma$, przyjmuje się za miarę jego rozpietości. Należy oczekiwać, że jeśli szerokość będzie mniejsza od liczby uczestników, to gra nie będzie sprawiedliwa.

I tak dla gry z 5 uczestnikami widzieliśmy, że rozkład był zupełnie płaski. Spodziewamy się zatem, że odchylenie standardowe zmiennej S_5 będzie większe niż 5. Przypomnijmy, że w rozpatrywanej grze można było losować liczby z zakresu od 1 do 5, co dla zmiennej X_i odpowiada wartości oczekiwanej

[*]Student Wydziału Fizyki, Uniwersytet Warszawski

$\mu_{X_i} = 3$ oraz odchyleniu standardowemu $\sigma_{X_i} = \sqrt{2}$. Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego, obliczamy, że szerokość rozkładu zmiennej $S_5 = X_1 + \ldots + X_5$ jest równe około 7, co rzeczywiście jest większe od liczby uczestników gry. Dla gier z 15 lub 30 uczestnikami szerokości rozkładu zmiennych S_{15} i S_{30} wynoszą odpowiednio około 13 i około 18. Liczby te są mniejsze od liczby uczestników w poszczególnych grach i w konsekwencji rozkład jest różny od płaskiego.

Na koniec spróbujemy zobaczyć jeszcze jedną ciekawą cechę gry w marynarza. Do tej pory rozważaliśmy gry, w których największa możliwa do wylosowania z liczb $x_{\max}$ była nieparzysta (a dokładnie $x_{\max}$ wynosiło 5). Charakterystyczną cechą gier o $x_{\max}$ nieparzystych jest to, że minimum rozkładu wypada na gracza znajdującego się na pozycji $k = \frac{n+1}{2}$. Dla $x_{\max}$ parzystych jest dokładnie odwrotnie (rys. 4) – dla graczy znajdujących się na pozycjach $k = \frac{n+1\pm1}{2}$ wypada dokładnie maksimum rozkładu (a więc szanse wybrania są tu największe).



Rys. 4

Właściwość tę można bardzo łatwo pokazać, wiedząc, że wartość oczekiwana S_n wynosi $n\mu$ (gdzie μ jest wartością oczekiwaną pojedynczej gry X_i). Dla $x_{\max}$ nieparzystych μ jest całkowite (co pokazuje proste obliczenie). Korzystając z tego, możemy obliczyć najbardziej prawdopodobne k:

$$k = ES_n \bmod n = (n\mu) \bmod n = 0,$$

gdzie μ jest liczbą całkowitą, a więc $n\mu$ jest podzielne bez reszty przez n. Podobnie możemy obliczyć najbardziej prawdopodobne k dla $x_{\max}$ parzystych. W takim przypadku μ jest połówkowe (czyli równe $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\ldots$), a zatem najbardziej prawdopodobne k wypada w pobliżu $\frac{n}{2}$.

Jak widać, nawet tak prosta gra jak gra w marynarza może mieć ciekawe właściwości. W zależności od przyjętych zasad może faworyzować pewnych uczestników. Może (ale nie musi) być grą sprawiedliwą. To, czy nią będzie, zależy tylko od wiedzy i (dobrych) chęci osoby prowadzącej grę.

Profesor Jacek Dobaczewski przesłał nam utwór swego studenta, Dominika Łubińskiego, pod tytułem

Wykład prof. J. Dobaczewskiego, Mechanika Kwantowa, Seria V, Zadanie 2.

Drogi Panie Profesorze,
W ramach pracy mej domowej
Napisałem ten poemat
O mechanice kwantowej.

Różni ona się znacząco
Od ujęcia klasycznego,
Więc spróbuję tu wyjaśnić
Czym się różni i dlaczego.

Przykładowo, gdy klasycznie
Jakąś cząstkę opisuję,
To podaję pęd, kierunek
I się niczym nie przejmuję.

W mechanice zaś kwantowej
Mam nie lada z tym zmartwienie,
Bo nie zmierzę równocześnie
Pędu razem z położeniem.

Również sam akt pomiarowy
Źródłem jest kłopotów licznych,
Bo gdy mierzę coś w układzie,
Zmieniam jego stan fizyczny.

Dodatkowo nam dochodzą
Elementy losowości,
Bo (na przekór Einsteinowi)
Bóg gra jednak z nami w kości.

Ale z czego to wynika?
Z czego biorą się różnice,
Że inaczej jest w kwantowej
Niż w klasycznej mechanice?

Bo kwantowa mechanika
Sięga na „najmniejsze kresy”
Opisując mikroświaty,
Gdzie nieciągłe są procesy

I jak po drabinie trzeba
Skakać między poziomami,
Bo energia nie jest płynna,
Tylko zmienia się porcjami.

A że porcje (czyli kwanty)
Są niewielkie, bardzo małe,
To złudzeniom ulegamy,
Że nasz świat jest ciągły stale.

⋆ ⋆ ⋆

Gdy te słowa ludzie słyszą
Wielu często mina rzednie.
Jednym trudno w to uwierzyć,
Inni mówią, że to brednie.

Owszem, trudna jest ta mowa
I mimo dowodów licznych
Człowiek z trudem ją przyjmuje,
Bo obiektem jest klasycznym.