Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2007

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
424 ($WT = 3{,}03$) i **425** ($WT = 2{,}37$)
z numeru 10/2006

Mateusz Łącki	– Kraków	42,38
Tomasz Tkocz	– Rybnik	40,79
Konrad Kapcia	– Częstochowa	36,46
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	35,00
Tomasz Wietecha	– Tarnów	31,64
Jerzy Witkowski	– Radlin	28,91
Krzysztof Magiera	– Łosiów	25,11
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	19,64
Jacek Konieczny	– Poznań	18,39

Zadania z fizyki nr 436, 437

Redaguje Jerzy B. BROJAN

436. Stacja kosmiczna składa się z dwóch części o masie 10 ton każda, odległych wzajemnie o 30 m. Obliczyć siłę rozciągającą stację, gdy krąży ona wokół Ziemi na wysokości 700 km w pozycji „pionowej” (jedna część bliżej Ziemi, druga dalej).

437. Mamy do dyspozycji ogniwa o SEM $= 1\,\mathrm{V}$ bez oporu wewnętrznego oraz oporniki o oporze $1\,\Omega$. Jak z tych elementów zbudować układ o dwóch końcówkach równoważny baterii o SEM $= 0{,}8\,\mathrm{V}$ i oporze wewnętrznym $0{,}75\,\Omega$? Należy użyć możliwie małej liczby ogniw i oporników. Najlepsze układy (o najmniejszej liczbie elementów) zostaną przedstawione w omówieniu rocznym, jednak osiągnięcie „rekordu” nie jest wymagane do uznania rozwiązania za prawidłowe.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2006

Przypominamy treść zadań:

428. Zegar-klepsydra stoi na precyzyjnej wadze, działającej bez żadnej zwłoki. Naszkicować wykres wskazań wagi w zależności od czasu, po obróceniu klepsydry.

429. Cylinder o wysokości $h = 0{,}5\,\mathrm{m}$ i objętości $V = 200\,\mathrm{cm}^3$ jest całkowicie wypełniony wodą, z wyjątkiem przyczepionego do dna pęcherzyka powietrza o objętości $V_0 = 0{,}02\,\mathrm{cm}^3$. Początkowo ciśnienie w górnym końcu cylindra wynosiło $p = 10^5\,\mathrm{Pa}$. Jeśli cylinder jest sztywny (o niezmiennej objętości), a współczynnik ściśliwości wody (zdefiniowany wzorem $\beta = -\frac{\Delta V}{V\Delta p}$) wynosi $\beta = 5\cdot 10^{-10}\,\mathrm{Pa}^{-1}$, to jak zmieni się ciśnienie w cylindrze, gdy pęcherzyk wypłynie na wierzch?

428. W chwili początkowej, gdy piasek zaczyna spadać z górnego pojemnika (a jeszcze nie spadł do dolnego), nacisk klepsydry na wagę staje się nieco mniejszy. Pod koniec efekt jest odwrotny, gdyż ostatnia porcja piasku w chwili upadku wywiera na klepsydrę siłę większą od swojego ciężaru. Zastosowanie równania

$$ma = F_w = P - R$$

do *całego* piasku (gdzie a – przyspieszenie środka masy, P – ciężar całego piasku, R – siła reakcji wagi) dowodzi, że gdyby piasek spadał stale na ten sam poziom, to przez większą część czasu działania klepsydry dwa efekty wymienione wyżej równoważyłyby się i wskazanie wagi R byłoby równe ciężarowi P. Wynika to stąd, że w takim przypadku środek masy przemieszczałby się w dół ruchem jednostajnym, czyli $a = 0$. Jeśli jednak uwzględnimy fakt, że piasek spada z coraz mniejszej wysokości, czyli prędkość spadku, a także masa piasku będącego w danej chwili w locie maleją, to maleje też prędkość środka masy piasku. Wektor $\vec{a}$ jest zatem skierowany w górę, więc $R > P$. Szukany wykres jest przedstawiony obok, z dużą przesadą co do realnej wielkości różnicy między R a P.

429. Dla powietrza nietrudno wyznaczyć z równania Clapeyrona współczynnik ściśliwości β_0 – okazuje się on równy odwrotności ciśnienia. Zmiana ciśnienia powietrza w pęcherzyku Δp_0 jest równa różnicy ciśnienia słupa wody i szukanej zmiany ciśnienia wody (którą oznaczymy jako Δp):

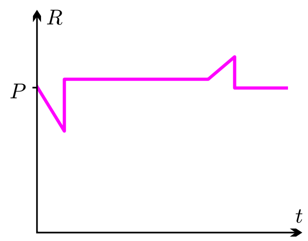
$$\Delta p_0 = \rho g h - \Delta p.$$

Stąd zmiana objętości pęcherzyka wynosi

$$\Delta V_0 = \beta_0 V_0(\rho g h - \Delta p) = V_0(\rho g h - \Delta p)/p.$$

Przyrównując ją do bezwzględnej wartości zmiany objętości wody $\Delta V = \beta V \Delta p$, otrzymujemy

$$\Delta p = \frac{\rho g h}{1 + \beta p V/V_0} = 3300\,\mathrm{Pa}.$$



Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2007

Zadania z matematyki nr 539, 540

Redaguje Marcin E. KUCZMA

539. Niech $T_1, \ldots, T_m$ będą trójelementowymi podzbiorami zbioru n-elementowego X; zakładamy, że zbiory T_i, T_j (dla $i \neq j$) mają co najwyżej jeden element wspólny. Dowieść, że istnieje podzbiór S zbioru X, liczący nie mniej niż $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ elementów i niezawierający żadnego ze zbiorów T_i.

540. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb całkowitych dodatnich, dla których każda z liczb $x+y$, $1+xy$ jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

Zadanie 540 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2006

Przypominamy treść zadań:

531. Rozważamy graf mający n wierzchołków oraz q krawędzi (każda krawędź łączy dwa różne wierzchołki; każde dwa wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź). Zakładamy, że istnieje co najmniej jeden zamknięty cykl krawędzi długości nieparzystej, ale nie istnieje cykl długości 3. Dowieść, że $4q \leqslant n^2 - 2n + 5$.

532. Ciąg liczb rzeczywistych (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym:

$$a_1 = 1, \qquad a_n = \frac{n+1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2.$$

Wyprowadzić wzór jawny, wyrażający liczby a_n jako funkcję zmiennej n.

531. Dowód przez indukcję. Dla $n = 5$ graf musi być pięcioelementowym cyklem; zatem $q = 5$ i (nie)równość zachodzi. Ustalmy $n > 5$ i przyjmijmy słuszność dowodzonego twierdzenia „dla mniejszych n". Niech G będzie grafem o n wierzchołkach, mającym podaną własność, niech c będzie najmniejszą liczbą nieparzystą, dla której istnieje w G cykl długości c (więc $c \geqslant 5$) i niech C będzie takim cyklem; z minimalności c wynika, że żadne dwa wierzchołki w C, które nie sąsiadują, nie są połączone krawędzią.

Oznaczmy przez B zbiór wierzchołków grafu G poza C, a przez b – ich liczbę ($b = n - c$). W grafie G nie ma trójkątów, więc żaden punkt zbioru B nie jest połączony krawędziami z parą sąsiadujących punktów cyklu C. Zatem każdy punkt z B wysyła co najwyżej $(c-1)/2$ krawędzi do C, a łączna liczba krawędzi łączących B z C nie przekracza

$$\frac{b(c-1)}{2}.$$

Jeśli w zbiorze B istnieje cykl długości nieparzystej (wówczas $b \geqslant 5$), to na mocy założenia indukcyjnego liczba krawędzi w obrębie B jest nie większa niż

$$\frac{b^2 - 2b + 5}{4}.$$

Jeśli w B nie ma cyklu nieparzystego, to graf G jest w obrębie B dwudzielny, tzn.

$$B = B_1 \cup B_2, \quad |B_i| = b_i, \quad b_1 + b_2 = b,$$

żadna krawędź nie łączy punktów z tego samego B_i; wówczas liczba krawędzi w obrębie B jest nie większa niż

$$b_1 b_2 \leqslant \frac{(b_1+b_2)^2}{4}.$$

Zatem w każdym przypadku ta liczba nie przekracza $b^2/4$.

W cyklu C mamy c krawędzi. Dla pełnej liczby krawędzi w grafie G otrzymujemy oszacowanie

$$q \leqslant c + \frac{b(c-1)}{2} + \frac{b^2}{4} = \frac{4c + 2(n-c)(c-1) + (n-c)^2}{4} =$$
$$= \frac{n^2 - 2n + 5 - (c-1)(c-5)}{4} \leqslant \frac{n^2 - 2n + 5}{4},$$

które zamyka krok indukcyjny i kończy rozwiązanie.

532. Obliczenie kilku początkowych wyrazów ciągu pozwala zgadnąć wzór ogólny

$$a_n = (n+1)2^{n-2},$$

który nietrudno udowodnić przez indukcję. Dla $n = 1$ wzór zgadza się. Przyjmując

$$a_i = (i+1)2^{i-2}$$

dla $i < n$, dostajemy równość

$$4\sum_{i=1}^{n-1} a_i = \sum_{i=1}^{n-1}(i+1)2^i = -1 + \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)2^i =$$
$$= -1 + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_{ij}2^i,$$

gdzie $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } j \leqslant i, \\ 0 & \text{dla } j > i. \end{cases}$

Zmieniamy porządek sumowania,

$$4\sum_{i=1}^{n-1} a_i = -1 + \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=j}^{n-1} 2^i\right) = -1 + \sum_{j=0}^{n-1}(2^n - 2^j) =$$
$$= -1 + n\cdot 2^n - \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = -1 + n\cdot 2^n - (2^n - 1) = (n-1)\cdot 2^n.$$

Stąd wynika teza indukcyjna:

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i = \frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{(n-1)2^n}{4} = (n+1)2^{n-2}.$$