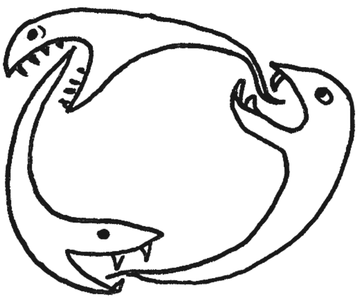
Intranzytywne porządki

Marcin MAKOWSKI[*]

Dowolną relację $\succ$, zachodzącą między elementami pewnego zbioru, nazywamy tranzytywną, jeżeli dla dowolnych trzech elementów A, B, C z faktu, że $A \succ B$ i $B \succ C$, wynika $A \succ C$. Jeśli warunek ten nie jest spełniony, to relację nazywamy *intranzytywną.*

Istnieje pogląd (głównie wśród ekonomistów), iż ludzie, kierując się racjonalnymi przesłankami, powinni wybierać między odpowiadającymi im rzeczami w określonym, liniowym porządku, tzn. jeśli przedkładamy Pepsi nad Coca-colę, Coca-colę nad Lemoniadę, to wydaje się logiczne, iż powinniśmy przedkładać Pepsi nad Lemoniadę. Okazuje się jednak, że to, co w danej chwili wolimy, zależy w znacznej mierze od tego, jak zaprezentowano nam ten wybór, a decyzje często podejmujemy spontanicznie, kierując się aktualną potrzebą. Paradoks ten był prawdopodobnie niezależnie dostrzegany przez wielu myślicieli. Stanisław Ulam w swojej autobiografii „Przygody matematyka" tak oto wspomina swoje problemy przy próbie oceny owoców według „dobroci":



> *Pamiętam, że w wieku ośmiu czy dziewięciu lat chciałem ocenić lubiane przeze mnie owoce według „dobroci". Próbowałem ustalić, że gruszka jest lepsza od jabłka, które jest lepsze od śliwki, która znów jest lepsza od pomarańczy, aż ku swemu zdziwieniu odkryłem, że ta relacja nie jest tranzytywna – to znaczy śliwki mogły być lepsze od orzechów, które były lepsze od jabłek, ale jabłka były lepsze od śliwek. Wpadłem w zaklęty krąg, co mnie wtedy zmieszało. Z ocenianiem matematyków jest trochę podobnie.*

Przyjrzyjmy się kilku ciekawym przykładom intranzytywności. Najbardziej znanym jest dziecięca gra *Kamień, Nożyce, Papier.* Relacja użyta do określenia zwycięzcy jest intranzytywna: Kamień pokonuje Nożyce, Nożyce pokonują Papier, ale Kamień przegrywa z Papierem.

Kolejnym przykładem intranzytywności są tzw. kości Efrona – ponumerowane niestandardowo kości sześcienne wynalezione przez Bradleya Efrona. Rozważmy cztery kości A, B, C, D, mające następującą liczbę oczek na sześciu ścianach:

A: 4, 4, 4, 4, 0, 0.
B: 3, 3, 3, 3, 3, 3.
C: 6, 6, 2, 2, 2, 2.
D: 5, 5, 5, 1, 1, 1.

Zdefiniujmy następującą grę dla dwóch graczy: w każdej rundzie gracz nr 1 wybiera jedną z powyższych kości, następnie gracz nr 2 wybiera jedną z pozostałych. Każdy z graczy rzuca swoją kością. Rundę wygrywa ten, na którego kości wypadła większa liczba oczek. O zwycięstwie w całej grze decyduje liczba wygranych rund.

Przy tak sformułowanych zasadach gracz nr 2, dokonując odpowiedniego wyboru kości (niezależnie od wyboru gracza nr 1), może zapewnić sobie większe prawdopodobieństwo wygranej.

Każda kość może zostać pokonana przez jedną z pozostałych z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$:

$$P(A > B) = P(B > C) = P(C > D) = P(D > A) = \tfrac{2}{3}.$$

Wynik ten kłóci się z naszą intuicją. Oczekiwalibyśmy raczej, iż „przewaga" jest tranzytywna, tzn. jeśli kość A ma przewagę nad kością B, B nad C i C nad D, to A powinna mieć przewagę nad kością D. Nasz przykład pokazuje, że nie jest to regułą.

Społecznie znaczącym przykładem intranzytywności jest tzw. paradoks wyborczy Condorceta. Przypuśćmy, że mamy trzech kandydatów w wyborach

[*]Nauczyciel, Masie, powiat Mońki

prezydenckich A, B i C oraz trzech wyborców o następujących, tranzytywnych, preferencjach.

Wyborca 1: $A \succ B \succ C \prec A$.
Wyborca 2: $B \succ C \succ A \prec B$.
Wyborca 3: $C \succ A \succ B \prec C$.

Jeśli A zostanie wybrany jako zwycięzca, to można argumentować, że zwycięzcą powinien być kandydat C, gdyż dwóch Wyborców (2 i 3) przedkłada C nad A, a tylko jeden A nad C. Podobne rozumowanie można przeprowadzić w przypadku zwycięstwa pozostałych dwóch kandydatów. Zbiorowe preferencje wyborców tworzą cykl i są intranzytywne: $A \succ B \succ C \succ A$. Znów napotkaliśmy sytuację sprzeczną z intuicją. Nawet jeśli indywidualne preferencje wyborców są tranzytywne, zbiorowe preferencje mogą być intranzytywne. Rozważania na temat tego paradoksu doprowadziły K. Arrowa do udowodnienia twierdzenia, iż nie istnieje procedura wyborcza spełniająca elementarne postulaty demokratyczne.

Załóżmy, że w wyborach startuje trzech kandydatów nr 0, nr 1, nr 2. Tym razem przebiegają one dwuetapowo i rozstrzygają się w II turze, do której przechodzi dwóch kandydatów z największym poparciem z I tury. W przypadku wyborów składających się z dwóch tur duże znaczenie dla kandydatów ma to, z kim przyjdzie im się zmierzyć w drugiej turze (kandydat X może wygrać z kandydatem Y, ale przegrać z kandydatem Z). Czytelnicy pewnie pamiętają, jak w czasie ostatnich wyborów prezydenckich w Polsce kolejne gazety prześcigały się w publikowaniu sondaży przedstawiających zmieniającą się sytuację poszczególnych kandydatów, w zależności od tego, na jakiego przeciwnika trafią w II turze.

Spróbujmy stworzyć uproszczony matematyczny model takich rozważań i przyjrzeć się w tym kontekście porządkom intranzytywnym.

Oznaczmy:

q_0 – prawdopodobieństwo przejścia do drugiej tury pary (1,2).
q_1 – prawdopodobieństwo przejścia do drugiej tury pary (0,2).
q_2 – prawdopodobieństwo przejścia do drugiej tury pary (0,1).

Niech $P(C_k|B_j)$ oznacza prawdopodobieństwo wygrania II tury wyborów przez kandydata k, gdy decyzja dotyczyła pary niezawierającej kandydata j $(k, j = 0, 1, 2)$.

Prawdopodobieństwo $P(C_k)$ wygrania wyborów przez kandydata k określa wzór:

$$P(C_k) = \sum_{j=0}^{2} P(C_k|B_j)P(B_j),\ k = 0, 1, 2,$$

gdzie $P(B_j) := q_j$.

Rozważmy przypadek:

(1) $$P(C_0) = P(C_1) = P(C_2) = \tfrac{1}{3},$$

gdy każdy z kandydatów ma równe szanse na wygranie wyborów (wyborcy w równym stopniu preferują każdego z kandydatów). Wbrew pozorom nie jest to sytuacja sztuczna. Wspomnijmy choćby wybory prezydenckie w USA między G.W. Bushem i A. Gorem, które przyniosły minimalne zwycięstwo obecnemu prezydentowi Stanów Zjednoczonych. Również ostatnie wyniki wyborów parlamentarnych we Włoszech czy Niemczech cechowały się bardzo wyrównanymi wynikami rywalizujących partii.

Warunek (1), po wprowadzeniu parametrów $P(C_k|B_j)$, przybiera postać następującego układu równań:

(2) $$\begin{cases} P(C_0|B_2)q_2 + P(C_0|B_1)q_1 = \frac{1}{3} \\ P(C_1|B_2)q_2 + P(C_1|B_0)q_0 = \frac{1}{3} \\ P(C_2|B_1)q_1 + P(C_2|B_0)q_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Rozwiązanie zadania F 689.
Warunek równowagi słupa rtęci dany jest równaniem:

$$p_0 = \rho g(H - h) + p_1,$$

gdzie p_1 to ciśnienie powietrza nad rtęcią. Z prawa Boyle'a–Mariotte'a mamy, że

$$p_1 = p_0 V/Sh.$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy:

$$h^2 + \left(\frac{p_0}{\rho g} - H\right) h - \frac{p_0 V}{S\rho g} = 0,$$

skąd

$$h = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \tfrac{4p_0 V}{S\rho g(H - p_0/\rho g)^2}}\right)\left(H - \tfrac{p_0}{\rho g}\right).$$

Rozwiązanie zadania F 690.
Układ początkowo znajduje się w stanie równowagi, zatem

$$p_0 + \rho g H_1 = p_1,$$

gdzie p_1 to początkowe ciśnienie gazu między tłokami. Z prawa Boyle'a–Mariotte'a wynika, że:

$$p_1 hS = (p_0 + \rho g H_2)(H_1 + h - x - H_2)S,$$

stąd

$$x = H_1 + h - H_2 - \frac{p_0 + \rho g H_1}{p_0 + \rho g H_2} h.$$

a jego rozwiązanie

$$(3)\qquad \begin{aligned} q_2 &= \tfrac{1}{d}\left(P(C_0|B_1)P(C_1|B_0) - \tfrac{P(C_0|B_1)+P(C_1|B_0)}{3}\right),\\ q_1 &= \tfrac{1}{d}\left(P(C_0|B_2)P(C_2|B_0) - \tfrac{P(C_0|B_2)+P(C_2|B_0)}{3}\right),\\ q_0 &= \tfrac{1}{d}\left(P(C_1|B_2)P(C_2|B_1) - \tfrac{P(C_1|B_2)+P(C_2|B_1)}{3}\right),\end{aligned}$$

gdzie

$$d = P(C_2|B_1)P(C_1|B_0)P(C_0|B_2) + P(C_2|B_0)P(C_1|B_2)P(C_0|B_1),$$

określa odwzorowanie $\phi : D_3 \to T_2$ trójwymiarowej kostki prawdopodobieństw warunkowych (D_3) w trójkąt (T_2), czyli dwuwymiarowy sympleks, bowiem $q_0 + q_1 + q_2 = 1$ i $q_i \geqslant 0$. Współrzędne barycentryczne punktu tego trójkąta odczytujemy jako prawdopodobieństwa q_0, q_1 i q_2.

Każdą szóstkę prawdopodobieństw warunkowych $P(C_j|B_k)$, spełniających warunek (1), nazywać będziemy *optymalną strategią wyborców*.

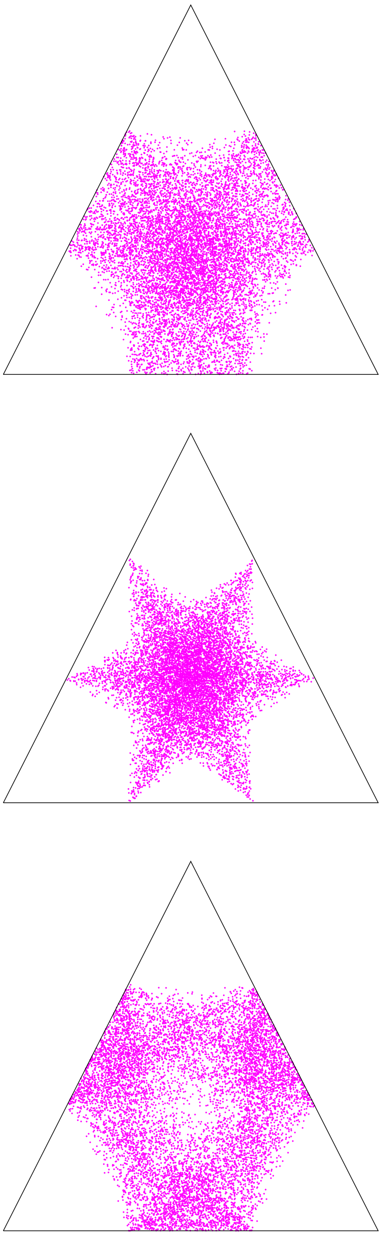
W naszym przypadku możemy mówić o relacji

$$\text{Kandydat nr } 0 < \text{Kandydat nr } 1,$$

jeśli spośród pary $(0, 1)$ większe szanse na wygraną ma Kandydat nr 1 niż Kandydat nr 0 ($P(C_0|B_2) < P(C_1|B_2)$).

Z wyborem intranzytywnym mamy do czynienia, jeśli spełniony jest jeden z poniższych warunków:

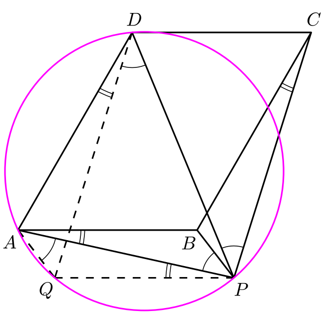
$$\begin{array}{l} \{P(C_2|B_1) < \tfrac{1}{2},\quad P(C_1|B_0) < \tfrac{1}{2},\quad P(C_0|B_2) < \tfrac{1}{2}\},\\ \text{lub}\\ \{P(C_2|B_1) > \tfrac{1}{2},\quad P(C_1|B_0) > \tfrac{1}{2},\quad P(C_0|B_2) > \tfrac{1}{2}\}.\end{array}$$



Optymalne strategie wyborców, kolejno od góry: wszystkie, intranzytywne, tranzytywne.

Rysunek przedstawia przeciwdziedzinę interesującego nas odwzorowania ϕ dla 10 000 punktów wybranych losowo względem rozkładu prawdopodobieństwa stałego na kostce. Intranzytywne strategie optymalne wyborców tworzą sześcioramienną gwiazdę, złożoną z dwóch trójkątów, z których każdy odpowiada jednemu z dwóch możliwych porządków intranzytywnych. Pokrywają one znaczną część, bo aż 4/9 powierzchni trójkąta, z czego 2/9 to obszar pokrywania się dwóch porządków intranzytywnych – centralna część rysunku. Zauważmy, że wszystkie strategię optymalne (2/3 powierzchni trójkąta) pokrywają ten sam obszar sympleksu co optymalne strategie tranzytywne, choć te ostatnie rzadziej występują w środkowej części rysunku. Oznacza to, że dla każdej optymalnej strategii intranzytywnej możemy dobrać strategię tranzytywną prowadzącą do tego samego wyniku. Na przykład, przy zrównoważonych prawdopodobieństwach q_0, q_1 i q_2 (tzn. w okolicy punktu $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$, na pewnym etapie ostatniej prezydenckiej kampanii wyborczej w Polsce niemalże równoprawdopodobny był każdy z możliwych składów drugiej tury) wyborcy w równym stopniu dzielą swoją sympatię pomiędzy trzech kandydatów na trzy sposoby: tranzytywny lub jeden z dwóch intranzytywnych.

Stanisław Ulam stwierdził, że porządek intranzytywny występuje często przy ocenie matematyków. Polityków chyba trochę też. Ciekawym zadaniem jest szukanie użytecznych modeli, w których optymalne efekty da się uzyskać jedynie dzięki porządkom intranzytywnym. Sukcesy na tym polu pozwoliłyby odejść do lamusa poglądom uznającym porządki intranzytywne za paradoksalne i niepożądane.



Rozwiązanie zadania M 1166.

Niech Q będzie takim punktem, że czworokąt $ABPQ$ jest równoległobokiem. Wówczas czworokąt $DCPQ$ także jest równoległobokiem. Zatem

$$\sphericalangle APQ = \sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB = \sphericalangle ADQ\,.$$

Wobec tego na czworokącie $ADPQ$ można opisać okrąg, skąd wynika, że

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle PAQ = \sphericalangle PDQ = \sphericalangle CPD\,.$$