Hipoteza Waringa – ciąg dalszy twierdzenia Lagrange'a

Przytoczone w artykule Edmunda Puczyłowskiego twierdzenie Lagrange'a ma liczną rodzinę. Edmund Waring sformułował myśl, znaną do dziś jako *hipoteza Waringa*. Głosi ona, że
dla dowolnego wykładnika naturalnego n istnieje taka liczba naturalna m, że każda liczba naturalna może być przedstawiona w postaci m-składnikowej sumy n-tych potęg liczb całkowitych nieujemnych.
Dla $n = 2$ najmniejszą taką liczbą jest 4, dla $n = 3$ – liczba 9.

Hipoteza Waringa stała się twierdzeniem w 1909 roku, kiedy udowodnił ją David Hilbert. Pozostało jednak pytanie, jak dla danej liczby n wygląda najmniejsza liczba m. Bardzo łatwo uzyskać oszacowanie

$$(\star) \qquad m \geqslant k := 2^n + \left\lfloor \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \right\rfloor - 2,$$

gdzie $\lfloor a \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby a, czyli to, co informatycy nazywają jej podłogą.

Istotnie, można łatwo wskazać liczbę, która wymaga zsumowania k n-tych potęg. Jest nią mianowicie liczba $q = 2^n \cdot \left\lfloor \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \right\rfloor - 1$. Liczba ta jest (oczywiście) mniejsza od 3^n, zatem aby ją otrzymać, trzeba będzie sumować jedynie n-te potęgi dwójek i jedynek. Tych pierwszych mieści się w niej (oczywiście)

$$\left\lfloor \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \right\rfloor - 1.$$

Zatem pozostała część n-tych potęg, składających się na q, stanowią n-te potęgi jedynek, których trzeba $2^n - 1$. Razem n-tych potęg potrzeba więc k.

I okazuje się, że niewiele więcej można na ten temat powiedzieć. We wszystkich znanych przypadkach najmniejszą wartością m jest właśnie k, a zbadano już wykładniki (to nie pomyłka!) do $n = 471\,600\,000$ (rok 1989). Jak się zdaje, zaprzestano dalszego bicia rekordów, bo należałoby odpowiedzieć najpierw na pytanie, jak daleko trzeba jeszcze szukać. Wiadomo bowiem, że *dla dostatecznie dużych wartości n najmniejszą wartością m jest k* – udowodnił to równo pięćdziesiąt lat temu Kurt Mahler.

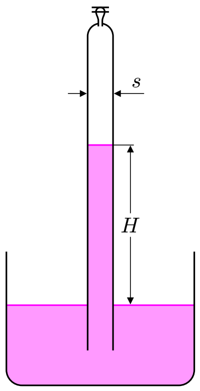
Pozostaje wobec tego pytanie, czy $471\,600\,000$ to już dostatecznie dużo. Może ktoś z Czytelników *Delty* potrafi znaleźć odpowiedź?

M. K.

Zadania

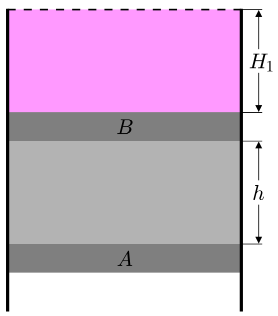
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 689. Do zamkniętej u góry rurki barometru wpuszczono porcję powietrza o objętości V i ciśnieniu równym atmosferycznemu p_0 (rys. 1). O ile obniży się słup rtęci w rurce? Początkowa wysokość słupa rtęci wynosiła H, przekrój wewnętrzny rurki jest równy S, a gęstość rtęci można uznać za daną.
Rozwiązanie na str. 2



Rys. 1

F 690. Mamy odkryte naczynie cylindryczne, w którym między tłokami A i B znajduje się gaz idealny, a nad tłokiem B ciecz o gęstości ρ (rys. 2). Tłok A jest utrzymywany na stałej wysokości. Wysokość słupa cieczy jest równa H_1 i sięga do brzegów naczynia. Na jaką wysokość należy izotermicznie podnieść tłok A, żeby nad tłokiem B został słup cieczy o wysokości H_2? Początkowa odległość między tłokami wynosi h, ciśnienie atmosferyczne jest równe p_0.
Rozwiązanie na str. 2

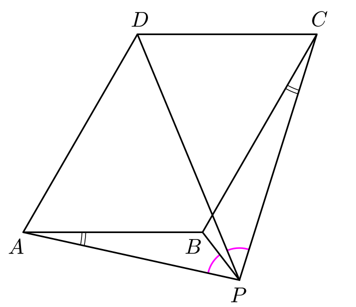


Rys. 2

Redaguje Waldemar POMPE

M 1165. Dane są takie liczby naturalne $m, n \geqslant 2$, że liczba $m^2 + n^2 - 1$ jest podzielna przez $m + n - 1$. Dowieść, że liczba $m + n - 1$ jest złożona.
Rozwiązanie na str. 16

M 1166. Punkt P leży na zewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$ (rys. 3). Dowieść, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$.
Rozwiązanie na str. 3



Rys. 3

M 1167. Dana jest liczba całkowita dodatnia m oraz taka funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest zależność

$$\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{m \text{ razy}}(x) = x\,.$$

Wykazać, że $(f \circ f)(x) = x$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$.
Rozwiązanie na str. 16