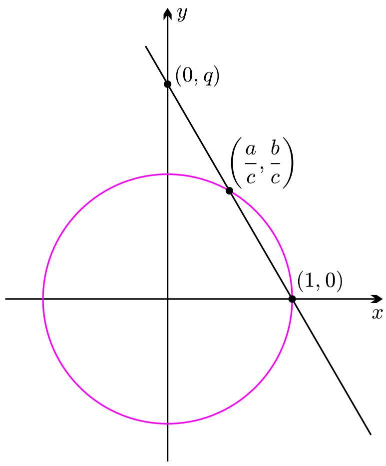
Trójki pitagorejskie

Stwierdzenie, czy dla ustalonej trójki liczb całkowitych dodatnich (a, b, c) istnieje trójkąt, którego boki mają taką właśnie długość, jest proste. Wystarczy, aby suma dowolnych dwóch liczb z tej trójki była większa od trzeciej. Jeśli ten warunek jest spełniony, to od razu możemy powiedzieć, czy trójkąt będzie prostokątny. Kwadrat największej liczby musi być równy sumie kwadratów pozostałych. Takie trójki nazywamy pitagorejskimi. Każda trójka pitagorejska daje nam nowe trójki postaci (ka, kb, kc), dlatego wystarczy rozpatrywać tylko trójki, które nie są wielokrotnością jakiejś innej. Będziemy je nazywać pierwotnymi, a do ich wyznaczania przyda nam się okrąg.

Każdej pierwotnej trójce pitagorejskiej (a, b, c) przyporządkujmy punkt $(a/c, b/c)$ na okręgu zadanym równaniem $x^2 + y^2 = 1$. Obie współrzędne tego punktu są wymierne. Ponieważ tę procedurę możemy odwrócić (ułamki sprowadzamy do wspólnego mianownika), wszystkie pierwotne trójki pitagorejskie są zakodowane przez takie właśnie punkty na okręgu.



Idźmy jednak dalej. Prosta przechodząca przez punkty $(1, 0)$ i $(a/c, b/c)$ przetnie oś OY w punkcie $(0, q)$, gdzie q jest liczbą wymierną większą od 1 (rys.). Odwrotnie, weźmy względnie pierwsze liczby naturalne m i n, tak by $m > n$ i poprowadźmy prostą przez $(1, 0)$ i $(0, m/n)$. Przecina ona okrąg w dwóch punktach. Jeden z nich to oczywiście $(1, 0)$. Współrzędne drugiego wyznaczamy, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{m}{n}x + \dfrac{m}{n} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Pamiętając, że punkt $(1, 0)$ jest jednym z rozwiązań i korzystając ze wzoru na sumę pierwiastków równania kwadratowego, znajdujemy drugie:

$$\left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \frac{2mn}{m^2 + n^2}\right).$$

Gdy m i n są różnej parzystości, ułamki te są nieskracalne, stąd ogólna postać pierwotnej trójki pitagorejskiej to $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$. Uzyskany wzór umożliwia podanie warunku koniecznego na to, by trójka (a, b, c) była trójką pitagorejską bez obliczania kwadratów. Mianowicie, w każdej trójce pitagorejskiej musi wystąpić liczba podzielna przez 3, liczba podzielna przez 4 oraz liczba podzielna przez 5. Mogą to być różne liczby, tak jak w $(3, 4, 5)$, a może to być jedna wspólna liczba dla wszystkich dzielników, tak jak w $(11, 60, 61)$. Przykładowy dowód: jeśli 3 dzieli m lub n, to jest to oczywiste. W przeciwnym przypadku, m^2 i n^2 przystają do 1 modulo 3 i $m^2 - n^2$ jest szukaną liczbą. Podobnie dowodzimy dla 5. Dla 4 wynika to bezpośrednio z faktu, że jedna z liczb m i n jest parzysta.

Powyższa metoda może być użyta do poszukiwania rozwiązań w liczbach wymiernych także innych równań wielomianowych stopnia dwa z całkowitymi współczynnikami (wykorzystała ją, na przykład, M. Brambilla w *Delcie* 10/2006). Najważniejsze, żeby najpierw znaleźć przynajmniej jeden punkt o współrzędnych wymiernych na zadanej przez równanie krzywej. Ale czy taki punkt zawsze istnieje?

Małą Deltę przygotowali Mikołaj KORZYŃSKI i Marcin HAUZER