Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

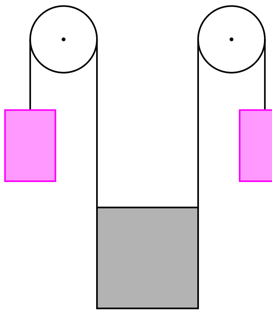
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2007

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 434, 435

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

434. Jednorodna kwadratowa płytka o boku a wisi na dwóch długich niciach przełożonych przez bloki, a na drugim końcu każdej nici wisi ciężarek o masie równej połowie masy płytki (rys. 1). Obliczyć częstotliwość małych obrotów płytki w płaszczyźnie rysunku.

Wskazówka: moment bezwładności płytki względem osi przechodzącej przez jej środek i prostopadłej do jej płaszczyzny jest równy $\frac{1}{6}ma^2$ (m – masa płytki).

435. Z kondensatora o pojemności C i zwojnicy zestawiono obwód. Drgania elektryczne w tym obwodzie okazały się tłumione, z dwóch powodów:

a) kondensator charakteryzuje się pewną niewielką upływnością, co można przedstawić jako równolegle dołączony do niego opornik o dużym oporze R_1,

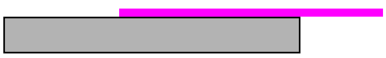
b) uzwojenie zwojnicy ma pewną niewielką oporność R_2.

Aby poprawić dobroć obwodu, możemy wsuwać do zwojnicy lub wysuwać rdzeń ferromagnetyczny, zmieniając w ten sposób indukcyjność L. Straty energii w rdzeniu (wynikające z histerezy i prądów wirowych) są pomijalnie małe. Jak należy wybrać wartość L, aby dobroć osiągnęła wartość maksymalną?

Dobrocią obwodu drgającego nazywa się wielkość $2\pi E/\Delta E$, gdzie E – energia drgań, ΔE – strata energii w ciągu jednego okresu. Dla drgań słabo tłumionych jest ona równa ilorazowi częstości ω przez podwojony wykładnik tłumienia (parametr α w czynniku $e^{-\alpha t}$).

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2006

Przypominamy treść zadań:



Rys. 2

426. Cienki jednorodny pręt położono na poziomym stole kończącym się pionową krawędzią (rys. 2) w pozycji prostopadłej do tej krawędzi. Następnie powoli przesuwano pręt w stronę krawędzi, aż zaczął się przechylać i ześlizgiwać. Tarcie między prętem a stołem nie występuje, tzn. siła reakcji stołu jest stale prostopadła do pręta. Który punkt pręta jako ostatni utraci kontakt z podłożem? Ile w tym momencie będzie wynosił kąt przechyłu pręta? Dopuszczalna jest odpowiedź oparta na obliczeniach numerycznych.
Jak zmieniłyby się odpowiedzi na powyższe pytania, gdyby wartość przyspieszenia ziemskiego g uległa podwojeniu?

427. Przypuśćmy, że masa neutronu byłaby o 0,1% mniejsza od rzeczywistej, przy niezmienionej masie protonu i elektronu. Jak wpłynęłoby to na właściwości atomu wodoru? Niezbędne dane wziąć z tablic.

426. Wprowadźmy oznaczenia: x i y – współrzędne wektora położenia środka pręta względem krawędzi stołu (przy czym oś y ma zwrot w dół), s – długość tego wektora, α – kąt przechyłu pręta, m – jego masa, I – moment bezwładności, R – siła reakcji krawędzi stołu. Równania ruchu postępowego i obrotowego pręta mają postać: $m = \ddot{x}R\sin\alpha$, $m\ddot{y} = m\mathrm{g} - R\cos\alpha$, $I\ddot{\alpha} = Rs$, gdzie kropką oznaczono pochodną względem czasu. Wykorzystując związki $x = s\cos\alpha$, $y = s\sin\alpha$, można wyeliminować zmienne x, y i R, dochodząc do układu dwóch równań:

$$\ddot{s} = \mathrm{g}\sin\alpha + s\dot{\alpha}^2, \qquad \ddot{\alpha} = \frac{ms(\mathrm{g}\cos\alpha - 2\dot{s}\dot{\alpha})}{I + ms^2}.$$

Autorowi udało się scałkować te równania jedynie numerycznie. (Można, oczywiście, przywołać stałą wartość całkowitej energii, ale nie wystarcza to do pełnego rozwiązania układu). Należy podstawić $I = \frac{l}{12}ml^2$ (l – długość pręta), jako warunki początkowe przyjąć trzy spośród wielkości s, $\dot{s}$, α, $\dot{\alpha}$ równe zeru, a czwartą bardzo małą, i zakończyć obliczenia w chwili osiągnięcia punktu, w którym $\ddot{\alpha} = 0$ (wtedy $R = 0$, tzn. następuje oderwanie). Wynik jest następujący: oderwanie pręta od krawędzi stołu nastąpi przy wartości $s = 0{,}25l$, $\alpha = 0{,}686$ rad $= 39{,}3°$.

Nietrudno sprawdzić, że podwojenie g odpowiada przeskalowaniu czasu o czynnik $\sqrt{2}$ i nie ma wpływu na powyższe wyniki.

427. Gdyby masa neutronu była o 0,1% mniejsza od rzeczywistej, byłaby mniejsza od sumy mas protonu i elektronu. Zatem atom wodoru nie byłby trwały – przekształciłby się w neutron wskutek wychwytu elektronu orbitalnego, zgodnie ze schematem $p + e^- \to n + v$. Materia w Kosmosie składałaby się głównie z neutronów.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2007

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
422 ($WT = 3{,}16$) i **423** ($WT = 3{,}40$)
z numeru 9/2006

Mateusz Łącki	– Kraków	42,38
Tomasz Tkocz	– Rybnik	38,12
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	35,00
Konrad Kapcia	– Częstochowa	33,49
Tomasz Wietecha	– Tarnów	27,66
Jerzy Witkowski	– Radlin	27,36
Krzysztof Magiera	– Łosiów	21,94
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	17,01
Jacek Konieczny	– Poznań	16,87

Zadania z matematyki nr 537, 538

Redaguje Marcin E. KUCZMA

537. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta. Udowodnić, że

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\leqslant 3.$$

538. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg. Punkty A', C', D' są odpowiednio ortocentrami trójkątów BAE, BCE, BDE. Dowieść, że trójkąty ACD i $A'C'D'$ są przystające.

Zadanie 538 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2006

Przypominamy treść zadań:

529. Dane są liczby całkowite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 oraz liczba całkowita dodatnia m, będąca dzielnikiem zarówno sumy liczb x_i, jak i sumy ich kwadratów. Wyjaśnić, czy z tych założeń wynika, że m jest także dzielnikiem liczby

$$x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5-5x_1x_2x_3x_4x_5.$$

530. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Proste poprowadzone z punktu A są styczne do okręgu o średnicy BC w punktach P i Q. Udowodnić, że punkty P, Q i H są współliniowe.

529. Liczby x_i są pierwiastkami wielomianu

$$P(x)=\prod_{i=1}^{5}(x-x_i)=x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

o współczynnikach

$$A=-\sum_{i=1}^{5}x_i,$$
$$B=\sum_{i<j}x_ix_j=\frac{1}{2}\left(A^2-\sum_{i=1}^{5}x_i^2\right),$$
$$\ldots$$
$$E=-\prod_{i=1}^{5}x_i\,.$$

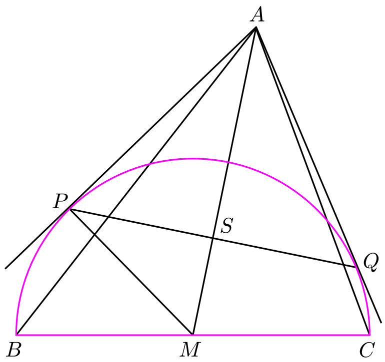
W myśl założenia liczby A oraz $2B$ są podzielne przez m. Należy zaś wyjaśnić, czy liczba $F=\sum_{i=1}^{5}x_i^5+5E$ dzieli się przez m. Odpowiedź łatwo wynika z zależności

$$0=\sum_{i=1}^{5}P(x_i)=\sum_{i=1}^{5}x_i^5+A\sum_{i=1}^{5}x_i^4+B\sum_{i=1}^{5}x_i^3+$$
$$+C\sum_{i=1}^{5}x_i^2+D\sum_{i=1}^{5}x_i+5E\equiv F+B\sum_{i=1}^{5}x_i^3 \pmod{m}.$$

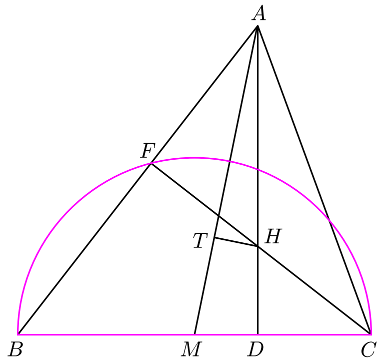
Jeśli $B\equiv 0$, to oczywiście $F\equiv 0 \pmod{m}$. Niech teraz $B\not\equiv 0 \pmod{m}$. Wiemy, że $2B\equiv 0$, więc liczba m musi być parzysta. Zatem suma $\sum x_i$ (podzielna przez m) jest liczbą parzystą, więc i suma $\sum x_i^3$ jest liczbą parzystą. Wobec tego

$$F\equiv -B\sum_{i=1}^{5}x_i^3=-2B\cdot\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}x_i^3\right)\equiv 0 \pmod{m}.$$

Wniosek: niezależnie od przypadku, badana liczba F dzieli się przez m.



530. Oznaczmy przez M środek boku BC,
przez S – punkt przecięcia odcinków AM i PQ,
przez D – rzut prostokątny punktu A na odcinek BC,
przez F – rzut prostokątny punktu C na odcinek AB,
a przez T – rzut prostokątny punktu H na odcinek AM. Ponieważ $PQ\perp AS$, zadanie sprowadza się do wykazania, że punkty S i T pokrywają się – czyli że $|AS|=|AT|$.



Przyjmijmy, że punkty P, Q leżą odpowiednio po tych stronach prostej AM, co punkty B, C. Z podobieństw trójkątów prostokątnych $\triangle ATH\sim\triangle ADM$, $\triangle AFH\sim\triangle ADB$ oraz $\triangle ASP\sim\triangle APM$ wynikają równości $|AT|\cdot|AM|=|AH|\cdot|AD|=|AF|\cdot|AB|$ oraz $|AS|\cdot|AM|=|AP|^2$. Ich prawe strony są równe, bowiem AP jest odcinkiem stycznej do okręgu (BCF). Zatem $|AT|=|AS|$.