# Dlaczego $2 \cdot 2 = 4$, czyli twierdzenia o rekursji

*Adam KOLANY*[*]

Matematyk nie musi wiedzieć, ile jest $2 \cdot 2$ — on musi wiedzieć, **czemu** to jest 4. Z kolei logik zagadnięty w tej materii, zanim odpowie, najpierw zada cztery pytania: co to jest *„dwa”*, co to jest *„ile”*, co to jest *„razy”* i co to jest *„jest”*. Tę ostatnią kwestię pozostawmy filozofom, przyjmując, że wiemy, co to znaczy. Co to znaczy *„ile”*, nadaje się na całkiem osobny artykuł, więc i tym nie będziemy sobie teraz zaprzątać głowy (szczególnie że chodzi tylko o *„cztery”*). Co to jest *„dwa”*, wyjaśni się niebawem. Tym, czym zajmiemy się w tym artykule, jest to, co znaczy *„razy”*.

We współczesnej teorii mnogości liczby naturalne definiuje się jako elementy najmniejszego zbioru **induktywnego** (oznaczanego zazwyczaj symbolem $\omega$). Najmniejszego, czyli zawartego w każdym innym zbiorze induktywnym. Zbiór $A$, z kolei, jest induktywny, jeśli zbiór pusty $\emptyset$ (który uznamy za liczbę naturalną „zero”) doń należy ($0 \in A$) oraz spełnia on następujący warunek:

$$a \in A \Rightarrow a \cup \{a\} \in A.$$

W dalszym ciągu zamiast $a \cup \{a\}$ pisać będziemy $S(a)$ i nazywać będziemy to **następnikiem** $a$, czymkolwiek $a$ jest. Wówczas, wedle pomysłu J. von Neumanna, $1 = S(0) = \{0\}$, $2 = S(1) = \{0, 1\}$, $3 = S(2) = \{0, 1, 2\}$, $4 = S(3) = \{0, 1, 2, 3\}$, etc.

John von Neumann (ur. 28 grudnia 1903 r. w Budapeszcie – zm. 8 lutego 1957 r. w Waszyngtonie), inżynier chemik, fizyk, matematyk i informatyk. Wniósł znaczący wkład do wielu dziedzin matematyki, szczególnie teorii gier i uporządkował formalizm matematyczny mechaniki kwantowej. Uczestniczył w projekcie Manhattan. Przyczynił się do rozwoju numerycznych prognoz pogody.

Definicja zbioru liczb naturalnych jako najmniejszego zbioru induktywnego implikuje znaną ze szkoły zasadę **indukcji matematycznej**: jeśli jakaś własność $\Phi$ przysługuje liczbie zero oraz z tego, że przysługuje dowolnej liczbie $n$, wynika, że przysługuje liczbie następnej $S(n)$, to własność ta przysługuje wszystkim liczbom naturalnym. Niech bowiem $A$ będzie zbiorem tych i tylko tych liczb naturalnych, które mają własność $\Phi$. Wówczas, oczywiście, $0 \in A$ oraz jeśli $a \in A$, to także i $S(a) \in A$, czyli $A$ jest zbiorem induktywnym. Skoro $\omega$ zawarty jest w każdym zbiorze induktywnym, oznacza to, że w szczególności zawiera się w $A$. I tym sposobem dla dowolnego $a \in \omega$ zachodzi $\Phi(a)$.

Rozważmy teraz rodzinę $\mathfrak{R}_\oplus$ wszystkich relacji $\rho \subseteq (\omega \times \omega) \times \omega$ (czyli relacji wiążących pary liczb naturalnych z pojedynczymi liczbami naturalnymi), które spełniają następujące dwa warunki: $\langle a, 0 \rangle \; \rho \; a$, dla dowolnego $a \in \omega$, oraz jeśli już $\langle a, b \rangle \; \rho \; c$, to także $\langle a, S(b) \rangle \; \rho \; S(c)$, gdzie $a, b, c \in \omega$. Oczywiście, rodzina ta jest niepusta, bo relacja pełna $(\omega \times \omega) \times \omega$ do niej należy. Niech dalej $\rho_\oplus = \bigcap \mathfrak{R}_\oplus$. Nietrudno wykazać za pomocą zasady indukcji, że dla dowolnej pary liczb $a, b \in \omega$ istnieje $c \in \omega$, dla którego $\langle a, b \rangle \; \rho_\oplus \; c$. Nieco więcej zachodu wymaga zauważenie, że owo $c$ jest jedyne. Gdyby bowiem dla jakiejś pary $a, b$ tych „$c$” było dwa, powiedzmy $c_1$ i $c_2$, to wówczas relacja $\rho' = \rho_\oplus \setminus \{\langle \langle a, b \rangle, c_1 \rangle\}$ należałaby nadal do rodziny $\mathfrak{R}_\oplus$, skąd wynikałoby, że $\rho_\oplus \subsetneq \rho'$, co nie jest prawdą. Skoro tak, to znaczy, że relacja $\rho_\oplus$ jest funkcją, a to jedyne $c$, dla którego zachodzi $\langle a, b \rangle \; \rho_\oplus \; c$, nazywać będziemy **sumą** liczb $a$ i $b$ i oznaczać je symbolem $a + b$. Policzmy sobie coś. Skoro dla dowolnej relacji $\rho$ z $\mathfrak{R}_\oplus$ zachodzi $\langle a, 0 \rangle \; \rho \; a$, oznacza to, że $a + 0 = a$ (co zresztą doskonale „wiemy”). Skoro $\langle a, 0 \rangle \; \rho \; a$, to także $\langle a, S(0) \rangle \; \rho \; S(a)$, dla $\rho \in \mathfrak{R}_\oplus$. Czyli, innymi słowy, $a + 1 = S(a)$. Tj. dodanie jedynki, to po prostu wzięcie następnika danej liczby. Posiłkując się zasadą indukcji matematycznej (czyli właściwie definicją liczb naturalnych), można wykazać doskonale nam znane własności operacji dodawania liczb naturalnych – przemienność i łączność:

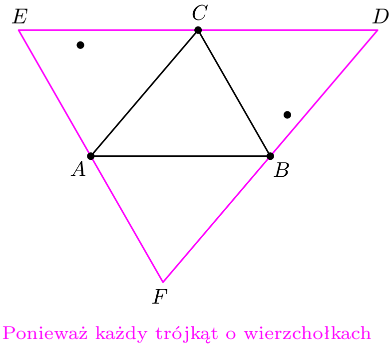
$$a + b = b + a \quad \text{ i } \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad a, b, c \in \omega.$$

Warunki ujęte w definicji rodziny $\mathfrak{R}_\oplus$ przekładają się na znane skądinąd formuły:

$$\begin{cases} a + 0 = a \\ a + (b + 1) = (a + b) + 1 \end{cases}$$

dla $a, b \in \omega$.

**Rozwiązanie zadania M 1162.**
Spośród wszystkich $\binom{5}{3} = 10$ trójkątów o wierzchołkach w danych punktach wybierzmy taki, który ma największe pole. Oznaczmy jego wierzchołki przez $A$, $B$, $C$. Przez każdy wierzchołek trójkąta $ABC$ poprowadźmy prostą równoległą do przeciwległego boku, uzyskując trójkąt $DEF$, o polu niewiększym niż 4.




Ponieważ każdy trójkąt o wierzchołkach w danych punktach ma pole niewiększe od pola trójkąta $ABC$, więc pozostałe dwa punkty leżą w trójkącie $DEF$. Ponadto w jednym z trójkątów $ABF$, $BCD$, $CEA$ nie leży żaden spośród danych punktów. Odcinając trójkąt ten od trójkąta $DEF$, uzyskujemy trapez o polu niewiększym od 3 i zawierający danych 5 punktów.

[*]Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Zostawmy jednak dodawanie, bo interesuje nas przecież mnożenie liczb. Niech $\Re_{\odot}$ będzie rodziną wszystkich relacji $\rho \subseteq (\omega \times \omega) \times \omega$, które spełniają następujące warunki: $\langle a, 0\rangle \; \rho \; 0$ dla $a \in \omega$ oraz jeśli $\langle a, b\rangle \; \rho \; c$, to także $\langle a, S(b)\rangle \; \rho \; (c + a)$. Oczywiście, znowu relacja pełna jest w $\Re_{\odot}$ i znowu możemy mówić o relacji $\rho_{\odot} = \bigcap \Re_{\odot}$, o której bez trudu, podobnie jak było w przypadku relacji $\rho_{\oplus}$, pokażemy, że jest funkcją, czyli że dla dowolnych $a, b \in \omega$ istnieje **jedyne** $c$, dla którego $\langle a, b\rangle \; \rho_{\odot} \; c$. To jedyne $c$ nazywać będziemy **iloczynem** liczb $a$ i $b$ i oznaczać będziemy symbolem $a \cdot b$. Teraz, skoro $\langle a, 0\rangle \; \rho \; 0$ dla $a \in \omega$ i $\rho \in \Re_{\odot}$, możemy to zapisać jako $a \cdot 0 = 0$. Ponadto dostajemy stąd, że $\langle a, 1\rangle \; \rho \; (0 + a) = a$ dla $\rho \in \Re_{\odot}$, czyli że $a \cdot 1 = a$ dla $a \in \omega$. Bezpośrednio z definicji rodziny $\Re_{\odot}$ dostajemy także, że $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$ dla $a, b \in \omega$, co stanowi uszczuploną wersję prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania. Pełną wersję tego prawa, jak i też inne własności mnożenia, takie jak przemienność i łączność, dostaniemy, pracowicie korzystając z zasady indukcji matematycznej.

Ile zatem jest $2 \cdot 2$? Mamy:

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Uważny Czytelnik zauważył pewien schemat w naszym dotychczasowym wywodzie. Rozważaliśmy rodziny relacji $\rho$ spełniające pewne dwa warunki. Pierwszy warunek stwierdzał, że pary postaci $\langle a, 0\rangle$ są w relacji z jakąś liczbą $g(a)$. Drugi warunek był implikacją: jeśli $\langle a, b\rangle$ był w relacji z $c$, to wtedy także $\langle a, S(b)\rangle$ jest w relacji z „czymś tam” zależnym od $a, b$ i $c$. Uściślenie tej obserwacji prowadzi do następującego twierdzenia.

**Twierdzenie (o rekursji).** *Niech $A$ i $P$ będą dowolnymi zbiorami i niech $g : P \longrightarrow A$ oraz $h : P \times \omega \times A \longrightarrow A$. Wówczas istnieje dokładnie jedna funkcja $f : P \times \omega \longrightarrow A$, spełniająca równania:*

$$\begin{cases} f(p, 0) = g(p) \\ f(p, n + 1) = h(p, n, f(p, n)) \end{cases}$$

*dla $p \in P$, $n \in \omega$.*

Dwa przykłady zastosowania tego twierdzenia widzieliśmy wyżej ($A = P = \omega$, jakie $g$ i $h$ ?).

Przyjrzyjmy się dokładniej innym.

**Przykład**

• **(potęgowanie)** *Niech $A = P = \omega$ i niech $g(p) = 1$ oraz $h(p, n, w) = p \cdot w$ dla $p, n, w \in \omega$. Wówczas funkcja $f$ z twierdzenia o rekursji to $f(p, n) = p^n$, gdzie $p, n \in \omega$*

• **(silnia)** *Niech $P = \{0\}$, $A = \omega$ oraz $g(0) = 1$ i $h(p, n, w) = w \cdot (n + 1)$, dla $p \in P$, $n, w \in \omega$. Wówczas $f(0, n)$, gdzie $f$ jest funkcją, o której mowa w twierdzeniu o rekursji, to $n!$.*

• **(poprzednik)** *Niech $P = \{0\}$, $A = \omega$ oraz $g(0) = 0$ i $h(p, n, w) = n$, dla $p \in P$, $n, w \in \omega$. Wówczas $f(0, n)$, gdzie $f$ jest funkcją, o której mowa w twierdzeniu o rekursji, to $0$ dla $n = 0$, a dla $n > 0$ to liczba, której następnikiem jest $n$.*

*Funkcję tę nazywać będziemy* **funkcją poprzednika** *i oznaczymy ją symbolem* $\mathbf{p}$.

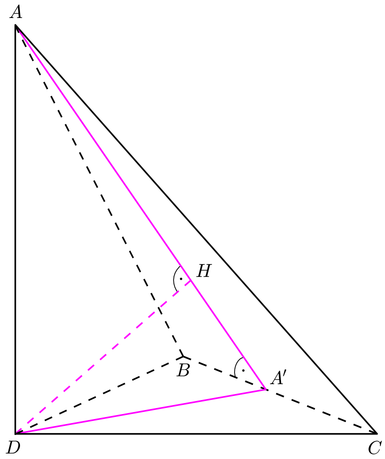
• **(odejmowanie)** *Niech $P = A = \omega$ oraz $g(a) = a$ i $h(p, n, w) = \mathbf{p}(w)$, dla $p \in P$, $n, w \in \omega$. Wówczas $f(p, n)$, gdzie $f$ jest funkcją, o której mowa w twierdzeniu o rekursji, to $0$ dla $p \leqslant n$, a dla $p > n$ to jedyna liczba $k$, dla której $n + k = p$ (czyli różnica $p$ i $n$, oznaczamy $p \dot{-} n$)*

Twierdzenie o rekursji można na wiele sposobów uogólniać, ale to temat na całkiem inny artykuł.

Pozostaje tylko zapytać, czy wszystkie „sensowne” działania na liczbach naturalnych można tak zdefiniować. Np. dzielenie z resztą? Okazuje się, że nie wszystkie, chociaż dzielenie z resztą akurat tak.

**Rozwiązanie zadania M 1163.**
W rozwiązaniu skorzystamy z następującego twierdzenia: *prosta $p$ jest prostopadła do płaszczyzny $\pi$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do pewnych dwóch nierównoległych prostych zawartych w płaszczyźnie $\pi$.*

Niech $A'$ będzie rzutem prostokątnym punktu $A$ na prostą $BC$.




Prosta $AD$ jest prostopadła do płaszczyzny $BCD$, skąd $AD \perp BC$. Ponadto $AA' \perp BC$, a więc z zacytowanego twierdzenia wynika, że prosta $BC$ jest prostopadła do płaszczyzny $AA'D$. Zatem każda prosta zawarta w płaszczyźnie $AA'D$ jest prostopadła do prostej $BC$.

Niech $H$ będzie spodkiem wysokości w trójkącie $AA'D$ opuszczonej z wierzchołka $D$. Wtedy $DH \perp AA'$ oraz $DH \perp BC$. Zatem prosta $DH$ jest prostopadła do płaszczyzny $ABC$. Wobec tego spodek wysokości czworościanu $ABCD$, opuszczonej z wierzchołka $D$ leży na wysokości $AA'$ trójkąta $ABC$.

Analogicznie dowodzimy, że spodek ten leży na pozostałych wysokościach trójkąta $ABC$, co kończy dowód.

**Rozwiązanie zadania F 687.**
Temperatura pary jest proporcjonalna do średniego kwadratu prędkości molekuł:

$$T = \rho \frac{v_{śr}^2}{3R}.$$

Zatem dla oszacowania temperatury trzeba znaleźć średni kwadrat prędkości. Ruch cząstek w pionie odbywa się pod wpływem siły ciężkości. Z jednej strony czas ruchu cząstki to $\tau = \frac{l}{v_{śr}}$, z drugiej jest to czas spadku swobodnego równy $\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Stąd $v_{śr} = l\sqrt{\frac{g}{2h}}$, co ostatecznie daje:

$$T = \frac{\rho l^2 g}{6Rh} \approx 600\,\mathrm{K}.$$