Ciąg, który lubi nierówności

Jan SZEJKO

Praca nagrodzona złotym medalem
w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki, Gdańsk 2006.

Prace na tegoroczny konkurs można nadsyłać do 1 maja 2007 roku.
Regulamin KUPzM zamieściliśmy w numerze 1(392)/2007.

Rozważmy ciąg (a_n) zdefiniowany rekurencyjnie dla $n \in \mathbb{Z}_+$ w następujący sposób:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \sum_{0<k<n,(n,k)=1} a_k$$

dla $n > 1$ (gdzie (n,k) oznacza największy wspólny dzielnik n i k). Zatem a_n to suma tych poprzednich wyrazów, które noszą numery względnie pierwsze z n; np. $a_6 = a_1 + a_5$, $a_8 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7$.

Wartości tego ciągu dla początkowych liczb naturalnych przedstawiam poniżej.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	1	2	3	7	8	22	32	66	91

n	11	12	13	14	15	16	17	18
a_n	233	263	729	1038	2059	3119	7674	8666

Będą nas interesować nierówności spełniane przez wyrazy ciągu a_n. Zacznijmy od najprostszych, które natychmiast wynikają z definicji:

(1) $$a_{n+1} \geqslant a_n,$$

(2) $$a_{2n+1} \geqslant a_{2n} + a_{2n-1}.$$

Pierwsza z nich wynika stąd, że $(n+1, n) = 1$, druga zaś stąd, że $(2n+1, 2n-1) = 1$ dla każdego n. Równie oczywiste są nierówności w drugą stronę:

(3) $$a_{2n+1} \leqslant a_{2n} + a_{2n-1} + a_{2n-2} + \ldots + a_1,$$

(4) $$a_{2n} \leqslant a_{2n-1} + a_{2n-3} + a_{2n-5} + \ldots + a_1$$

(druga wynika stąd, że wszystkie liczby względnie pierwsze z liczbą parzystą są nieparzyste). Zauważmy, że w dwóch ostatnich nierównościach równość zachodzi w nieskończenie wielu przypadkach dla n dodatnich: w pierwszej, zawsze gdy $2n + 1$ jest liczbą pierwszą, w drugiej zaś dla każdego n będącego potęgą dwójki.

Mniej trywialna jest nierówność

(5) $$a_{2n+1} > a_{2n} + a_{2n-2} + \ldots + a_2.$$

Jej dowód przebiega przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza oczywiście zachodzi. Przypuśćmy, że zachodzi również dla $n = k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}_+$. Wówczas, korzystając z (2) i z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$a_{2k+3} \geqslant a_{2k+2} + a_{2k+1} > a_{2k+2} + a_{2k} + a_{2k-2} + \ldots + a_2,$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego.

Z (5) oraz (1) natychmiast wynika kolejna nierówność:

(6) $$a_{2n+1} > a_{2n-1} + a_{2n-3} + \ldots + a_1.$$

Zauważmy jeszcze, że korzystając z (4) oraz (6), dostajemy

$$a_{2n} \leqslant a_{2n-1} + a_{2n-3} + \ldots + a_1 < a_{2n-1} + a_{2n-1},$$

czyli

(7) $$a_{2n} < 2a_{2n-1}.$$

Kiedy zacząłem zajmować się tytułowym ciągiem, zainteresowało mnie, jak zachowują się ilorazy kolejnych wyrazów: czy rosną do nieskończoności, czy może zbiegają do jakiejś liczby, czy też zachowują się w jeszcze inny sposób. Szybko zauważyłem, że choć ilorazy te bywają bardzo bliskie liczby 3, nie wygląda na to, by ją kiedykolwiek przekraczały. Z początku próbowałem udowodnić tę zależność indukcyjnie, korzystając z powyższych nierówności, jednak bezskutecznie. Na trop właściwej metody wpadłem dopiero wtedy, gdy usiłowałem udowodnić nierówność

(8) $$a_{2n} + a_{2n-2} > a_{2n-1} + a_{2n-3} + \ldots + a_1.$$

Tej nierówności również nie sposób dowieść przez prostą indukcję. Jednak gdy oznaczymy przez p najmniejszą liczbę pierwszą nieparzystą, która nie dzieli n, to liczba $2n - 2$ nie dzieli się przez żadną liczbę pierwszą nieparzystą mniejszą niż p, a więc jest względnie pierwsza z każdą liczbą nieparzystą mniejszą od p. Zatem $2n$ jest względnie pierwsza z liczbami $2n - 1$ i $2n - p$, a $2n - 2$ z liczbami $2n - 3, 2n - 5, \ldots, 2n - p$. Wobec tego

$$a_{2n} \geqslant a_{2n-1} + a_{2n-p},$$

$$a_{2n-2} \geqslant a_{2n-3} + a_{2n-5} + \ldots + a_{2n-p}.$$

Sumując powyższe nierówności i korzystając z (6), dostajemy

$$a_{2n} + a_{2n-2} \geqslant a_{2n-1} + a_{2n-3} + \ldots + a_{2n-p} + a_{2n-p} >$$
$$> a_{2n-1} + a_{2n-3} + \ldots + a_{2n-p} +$$
$$+ a_{2n-p-2} + a_{2n-p-4} + \ldots + a_1,$$

czyli dowodzoną nierówność.

Podobnej, choć nieco subtelniejszej, sztuczki użyłem w dowodzie (który tutaj pominę) nierówności

(9) $$a_{2n} > a_{2n-2} + a_{2n-3} + \ldots + a_1,$$

z której pożądana przez nas nierówność

(10) $$a_{n+1} < 3a_n$$

jest prostym wnioskiem. Dla n nieparzystych mamy bowiem mocniejszą nierówność (7), a dla $n = 2k$, korzystając z (3) oraz (9), dostajemy

$$a_{2k+1} \leqslant a_{2k} + a_{2k-1} + a_{2k-2} + \ldots + a_1 <$$
$$< a_{2k} + a_{2k-1} + a_{2k} \leqslant 3a_{2k}.$$

Warto przy okazji zauważyć, że nierówność (9) można łatwo uogólnić, ponieważ z (2) dostajemy

$$a_{2n+1} \geqslant a_{2n-1} + a_{2n} > a_{2n-1} + a_{2n-2} + \ldots + a_1.$$

Zatem dla każdego $n > 2$

(11) $$a_n > a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_1.$$

Pojawia się pytanie, czy nierówność (10) można poprawić, tzn. czy istnieje stała mniejsza niż 3, przy której nierówność byłaby nadal prawdziwa. Okazuje się jednak, że nie, bo w dowodzie nierówności (10) wszystkie istotne oszacowania odbywały się na poziomie wyrazów rzędu a_{2n-p}, które przy dużym p są małe w porównaniu z a_{2n}. Ścisły dowód pomijam.

Z (10) natychmiast wynika, że $a_{n+2} < 9a_n$. Tę nierówność można jednak znacząco poprawić. Pokażemy teraz, że dla $n \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi

$$a_{n+2} < 5a_n. \tag{12}$$

Skorzystamy kolejno z (3), (9), (7), (4), (10) oraz (8):

$$a_{2k+1} \leqslant a_{2k} + a_{2k-1} + a_{2k-2} + \ldots + a_1 < \\ < 2a_{2k} + a_{2k-1} < 5a_{2k-1},$$

$$a_{2k+2} \leqslant a_{2k+1} + a_{2k-1} + a_{2k-3} + \ldots + a_1 < \\ < 3a_{2k} + a_{2k} + a_{2k-2} < 5a_{2k}.$$

Okazuje się, że współczynnik 5 w tej nierówności wciąż nie jest optymalny, jednak dowód tego faktu tutaj pominę. Z kolei ze stałą 4 nierówność nie będzie prawdziwa, ponieważ mamy $a_{32}/a_{30} \approx 4{,}3$. Stąd widać, że optymalna stała dla tej nierówności będzie niecałkowita. Można przypuszczać, że będzie to liczba niewymierna, a nawet przestępna, jednak ciężko wyobrazić sobie, jak można by to udowodnić.

Interesujące jest, czy dla jakiegoś $k > 2$ optymalna stała c w nierówności $a_{n+k} < ca_n$ będzie liczbą całkowitą. Obliczenia na komputerze pokazują, że największy iloraz a_{n+6}/a_n, dla n mniejszych niż 10 000, to około 35,996. Dość długo usiłowałem udowodnić nierówność $a_{n+6} < 36a_n$, jednak bezskutecznie. W końcu zacząłem sprawdzać ją dla jeszcze większych n i okazało się, że

$$\frac{a_{30036}}{a_{30030}} \approx 36{,}02.$$

Widać więc, że nie zawsze warto polegać na hipotezach, które działają dla dziesięciu tysięcy przypadków.

Teraz przejdę do hipotezy, którą obliczenia potwierdzają z dużym zapasem, i co do której nie wyobrażam sobie, żeby mogła się kiedyś okazać fałszywa. Stwierdza ona, że dla wszelkich $n, k \in \mathbb{Z}_+$ zachodzą nierówności

$$a_k a_n \leqslant a_{n+k} < 5a_k a_n. \tag{13}$$

W rzeczywistości sądzę, że po lewej stronie mogłoby być $a_{k+1}a_n$, ale nie mam za taką nierównością żadnych argumentów, poza danymi doświadczalnymi i dowodami szczególnych przypadków dla małych k. Najważniejsze jednak w mojej hipotezie jest to, że skrajne strony różnią się o stały czynnik.

Okazuje się, że obie powyższe nierówności wynikają z mocniejszej, choć – przy pewnym obyciu z naszym ciągiem – dosyć intuicyjnej hipotezy. Niech $P(n)$ oznacza najmniejszą liczbę pierwszą, która nie dzieli n. Wspomniana hipoteza stwierdza, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ istnieje takie $l > 0$, że dla wszelkich $n, m \in \mathbb{Z}_+$ takich, że $P(n) + l \leqslant P(m)$ i $n + k > 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} \leqslant \frac{a_{m+k}}{a_m}. \tag{14}$$

Pokażę teraz szkic dowodu (bez korzystania z tej hipotezy) lewej nierówności z (13) w przypadku, gdy $P(n+k) \geqslant k$.

Dla wygody zmieńmy trochę oznaczenia. Zapiszmy nierówność w postaci

$$a_n \geqslant a_k a_{n-k} \quad \text{dla} \quad n > k > 0,\ P(n) \geqslant k. \tag{15}$$

W dowodzie posłużyłem się pomocniczym ciągiem dwuwymiarowym $(b_{i,j})$, zdefiniowanym dla $i \geqslant j \geqslant 1$ w następujący sposób:

$$b_{1,1} = 1, \quad b_{i,j} = \sum_{\substack{0<k<j \\ (i,k)=1}} b_{k,k}, \quad \text{gdy} \quad i \cdot j \neq 1.$$

Można pokazać przez indukcję względem j, że zachodzi nierówność

$$a_n \geqslant \sum_{i=j}^{k} b_{i,j} a_{n-i}, \quad \text{gdy} \quad P(n) \geqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Z niej w szczególności dla $j = k$ wynika, że przy $P(n) \geqslant k$

$$a_n \geqslant b_{k,k} a_{n-k}.$$

Jednak wprost z definicji ciągu $(b_{i,j})$ wynika, że dla każdego $i \in \mathbb{Z}_+$ mamy $b_{i,i} = a_i$. Stosując to do ostatniej nierówności, dostajemy nierówność (15). W przypadku, gdy $P(n) < k$, pożądana nierówność wynika łatwo z udowodnionego przypadku oraz z hipotezy (14).

W przypadku prawej nierówności z (13) nie udało mi się wiele udowodnić bez korzystania z hipotezy (14), przy założeniu zaś jej prawdziwości dowód przebiega dość łatwo, indukcyjnie względem k, przy czym trzeba w kroku indukcyjnym rozważyć osobno przypadki, gdy $P(n) > k$ oraz gdy $P(n) \leqslant k$. Stąd widać, że (13) wynika z hipotezy (14).

Zastanówmy się teraz nad konsekwencjami hipotezy (13). Zauważmy najpierw, że jeśli mamy nierówność

$$a_{n+k} \leqslant ca_n$$

dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$ i ustalonych $k \in \mathbb{Z}_+$ i $c \in \mathbb{R}_+$, to możemy stąd wnioskować, że ciąg (a_n) można oszacować z góry przez ciąg geometryczny o ilorazie $\sqrt[k]{c}$. Jest tak, ponieważ każdy z ciągów $(a_i, a_{k+i}, a_{2k+i}, \ldots)$, dla $i = 1, 2, \ldots, k$, można – co bardzo łatwo wykazać indukcyjnie – słabo oszacować z góry przez ciąg $(a_i, ca_i, c^2a_i, \ldots)$.

Zachodzi więc nierówność

$$a_{mk+i} \leqslant a_i(\sqrt[k]{c})^{mk} = \frac{a_i}{(\sqrt[k]{c})^i}(\sqrt[k]{c})^{mk+i}$$

dla każdego $m \in \mathbb{Z}_+$. Oznaczmy $a_i/(\sqrt[k]{c})^i$ przez c_i. Widać więc, że jeśli oznaczymy przez c' największą z liczb c_i dla $i = 1, 2, \ldots, k$, to zachodzić będzie nierówność $a_n \leqslant c'(\sqrt[k]{c})^n$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla nierówności w przeciwną stronę.

Jeśli więc hipoteza (13) jest prawdziwa, to dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}_+$ ciąg (a_n) można ograniczyć z dołu i z góry przez dwa ciągi geometryczne o wyrazach dodatnich i o ilorazach odpowiednio $\sqrt[k]{a_k}$ oraz $\sqrt[k]{5a_k}$.

Jest oczywiste, że jeśli dany ciąg można ograniczyć z dołu przez ciąg geometryczny o ilorazie q, to nie można go ograniczyć z góry przez ciąg o ilorazie $q' < q$ (i *vice versa*). W przeciwnym bowiem przypadku mielibyśmy dla każdego $n \in \mathbb{Z}_+$ i dla pewnych c, c' dodatnich

$$cq^n < a_n < c'q'^n,$$

czyli

$$c\left(\frac{q}{q'}\right)^n < c'.$$

Jednak po lewej stronie mamy rosnącą funkcję wykładniczą, zatem otrzymaliśmy sprzeczność.

Łatwo zauważyć, że wraz ze wzrostem k różnica liczb $\sqrt[k]{a_k}$ i $\sqrt[k]{5a_k}$ dąży do zera. Wynika to szybko stąd, że $(\sqrt[n]{a_n})$ jest ograniczony z góry. Z poprzedniego spostrzeżenia wynika, że jeśli moja hipoteza jest prawdziwa, to kres górny $\sqrt[k]{a_k}$ nie przekracza kresu dolnego $\sqrt[k]{5a_k}$, zatem musi istnieć taka liczba a, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ będzie

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant a \leqslant \sqrt[k]{5a_k}.$$

Skoro jednak skrajne strony mają wspólną granicę przy $k \to \infty$, to z twierdzenia o trzech ciągach tą granicą musi być a. Widzimy więc, że istnieje taka liczba, że ciąg (a_n) możemy ograniczyć z dołu przez ciąg geometryczny o dowolnym ilorazie dodatnim mniejszym od tej liczby, z góry zaś przez ciąg o dowolnym ilorazie od niej większym. Pokazuje to, że choć iloraz a_{n+1}/a_n nie dąży do żadnej liczby przy $n \to \infty$, to (przy założeniu prawdziwości hipotezy (13)) zachowanie ciągu (a_n) przypomina trochę zachowanie ciągu geometrycznego o ilorazie a.

Na nierównościach spełnianych przez wyrazy ciągu nie kończą się jego ciekawe własności. Szukając informacji o nim w Internecie, wpisałem jego początkowe wyrazy na stronie *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (http://www.research.att.com/~njas/sequences/). Okazało się, że istnieje on w tamtejszej bazie danych jako ciąg A045545. Znalazłem tam też informację, że Benoit Cloitre udowodnił, iż równość

$$a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy n i $n+2$ są liczbami pierwszymi bliźniaczymi. Widać stąd, jak szeroką gamę problemów otwiera omawiany ciąg. Zmagania z nim dały mi wiele radości i satysfakcji.

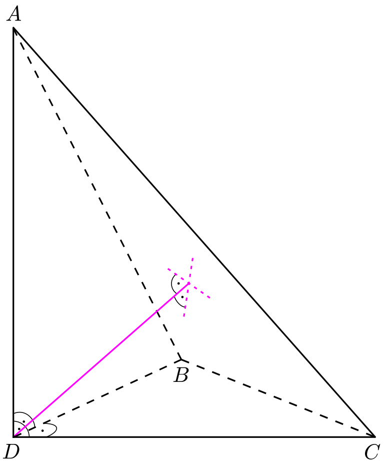
Czytelników zainteresowanych tematem przedstawionym w niniejszym artykule zapraszam do przeczytania całej pracy, której aktualna wersja znajduje się pod adresem http://students.mimuw.edu.pl/~js248325/praca.pdf.

Zadania

Redaguje Waldemar POMPE

M 1162. Na płaszczyźnie danych jest 5 punktów o tej własności, że pole każdego trójkąta o wierzchołkach w tych punktach nie przekracza 1. Wykazać, że punkty te leżą w pewnym trapezie o polu nieprzekraczającym 3.
Rozwiązanie na str. 6

M 1163. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym kąty płaskie przy wierzchołku D są proste (rys. 1). Wykazać, że spodek wysokości tego czworościanu, opuszczonej z wierzchołka D, pokrywa się z punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC.
Rozwiązanie na str. 7



Rys. 1

M 1164. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Wykazać, że każdy wyraz ciągu

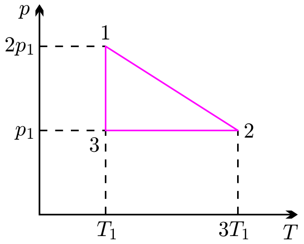
$$n!+1\,,\; n!+2\,,\;\ldots\,,\; n!+n$$

ma dzielnik pierwszy, który nie jest dzielnikiem żadnego innego wyrazu tego ciągu.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 687. Z butli, w której znajdują się silnie zagęszczone pary potasu, ucieka przez wąską poziomą rurkę wiązka atomów. Oszacować temperaturę par, wiedząc, że średnie obniżenie wiązki w odległości $l = 50\,\mathrm{cm}$ od butli wynosi $h = 3\,\mu m$.
Rozwiązanie na str. 7

F 688. Nad gazem idealnym wykonano cykl przemian pokazany na rysunku 2. Znaleźć stosunek maksymalnej objętości gazu do minimalnej, osiąganych w tym cyklu przemian, objętości.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2