Podamy teraz dowód samego twierdzenia Newtona, który oparty jest na poniższym lemacie. Przez $[\mathcal{F}]$ będziemy oznaczać pole figury $\mathcal{F}$.

Lemat. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, niebędący równoległobokiem, oraz liczba dodatnia a. Wówczas wszystkie punkty X leżące wewnątrz czworokąta $ABCD$, dla których $[XAB] + [XCD] = a$, leżą na jednej prostej.

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że proste AB i CD nie są równoległe i przecinają się w punkcie E (rys. 11). Niech ponadto K i L będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na półprostych $EA^{\rightarrow}$ i $ED^{\rightarrow}$, że $EK = AB$ oraz $EL = CD$. Wtedy

(2) $$a = [XAB] + [XCD] = [XEK] + [XEL] = [EKL] \pm [KLX],$$

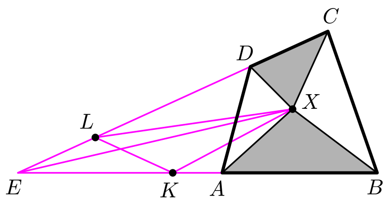
gdzie znak w ostatnim wyrażeniu zależy od tego, czy liczba a jest większa, czy mniejsza od pola trójkąta EKL (wtedy punkt X znajduje się odpowiednio na zewnątrz lub wewnątrz trójkąta EKL).

W obu przypadkach położenia punktów E, K i L nie zależą od wyboru punktu X. Zatem na mocy równości (2) pole trójkąta KLX również nie zależy od wyboru punktu X. Stąd wynika, że wszystkie punkty X leżą na pewnej prostej, równoległej do prostej KL.

Przystępujemy do dowodu twierdzenia Newtona. Niech $a = \frac{1}{2}[ABCD]$. Wykażemy, że jeśli X jest jednym z punktów I, M lub N, to

(3) $$[XAB] + [XCD] = a,$$

skąd bezpośrednio z powyższego lematu uzyskamy tezę twierdzenia Newtona.



Rys. 11

Oznaczmy przez r promień okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$. Wtedy z zależności $AB + CD = BC + DA$ otrzymujemy

$$[IAB] + [ICD] = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot r = \frac{1}{4}(AB + CD + BC + DA) \cdot r = \frac{1}{2}[ABCD],$$

co dowodzi równości (3) dla $X = I$. Ponadto

$$[MAB] + [MCD] = \frac{1}{2}[ABC] + \frac{1}{2}[CDA] = \frac{1}{2}[ABCD],$$

skąd otrzymujemy zależność (3) dla $X = M$. Dowód tej równości dla $X = N$ jest analogiczny. W ten sposób udowodniliśmy twierdzenie Newtona.

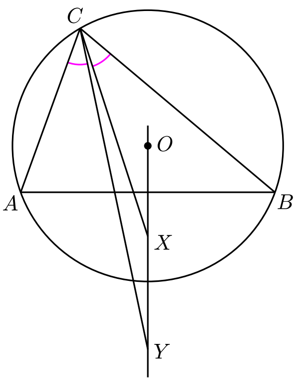
Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 685. Oszacować, jaką moc rozwija kolarz na finiszu w płaskim terenie.
Rozwiązanie na str. 16

F 686. Przy jakiej minimalnej prędkości rowerzysta może przelecieć przez głowę (razem z rowerem), po zaklinowaniu się przedniego koła w szczelinie chodnika?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Waldemar POMPE



1159. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu r (rys.). Punkty O, X, Y leżą w tej właśnie kolejności na symetralnej odcinka AB oraz wewnątrz kąta ACB, przy czym $OX \cdot OY = r^2$. Wykazać, że $\sphericalangle ACY = \sphericalangle XCB$.
Rozwiązanie na str. 6

1160. Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ liczb rzeczywistych jest określony przez warunek

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4 \quad \text{oraz} \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 - 1}{a_n} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$

Dowieść, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.
Rozwiązanie na str. 16

1161. Oznaczmy przez $f(n)$ tę liczbę całkowitą, która na osi liczbowej znajduje się najbliżej liczby $\sqrt{n}$. Obliczyć

$$\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \ldots + \frac{1}{f(10\,000)}.$$

Rozwiązanie na str. 6