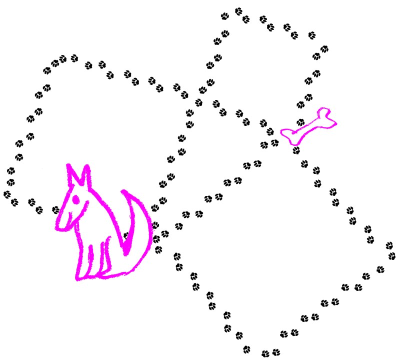
Wszechświat ci to obliczy

Aleksandra BEJ, Nadbor DROZD[*]



Zainspirowani artykułem Piotra Achingera o środku ciężkości i twierdzeniu Steinera postanowiliśmy podzielić się innymi zabawnymi przykładami fizycznego spojrzenia na zadania matematyczne. Proponujemy zabawę – jaka sytuacja fizyczna stoi za danym problemem? Podanym rozwiązaniom do matematycznej ścisłości brakuje zwykle kilku zdań, ale można je łatwo uzupełnić, jeśli się tylko pamięta matematyczne definicje pojęć, których fizyk używa bez przerwy, nie zastanawiając się nawet, skąd się wzięły.

1. Punkt X leży wewnątrz pewnego wielościanu wypukłego. Udowodnij, że przynajmniej jeden z rzutów prostopadłych punktu X na ścianę wielościanu zawiera się w tej ścianie (a nie w jej przedłużeniu).

2. Udowodnij, że suma wektorów prostopadłych do ścian dowolnego wielościanu jest zerem – przyjmujemy, że wszystkie wektory prostopadłe są skierowane do wewnątrz i mają długość równą polu powierzchni odpowiedniej ściany.

3. Niech A będzie sześcianem o jednostkowej krawędzi. Niech $B_1, B_2, \ldots B_6$ będą wektorami takimi, jak w poprzednim zadaniu. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $|x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_6 B_6|$, gdzie x_i jest dowolnie, ale jednakowo obraną współrzędną środka i-tej ściany.

4. Punkty F_1 i F_2 są ogniskami elipsy E. Punkt X należy do odcinka AB i elipsa E jest styczna do tego odcinka w X. Udowodnij, że kąty F_1XA oraz F_2XB są równe.

5. W trójkącie o wszystkich kątach mniejszych od $120°$ znajdź (skonstruuj) punkt realizujący najmniejszą sumę odległości od wierzchołków.

6. Udowodnij, że jeśli wielokąt ma osie symetrii, to wszystkie one przecinają się w jednym punkcie.

7. Niech punkty B_i, C_i, $i = l, 2, \ldots n$, leżą wszystkie w jednej płaszczyźnie oraz $\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_2C_2} + \ldots + \overrightarrow{B_nC_n} = \overrightarrow{0}$. Udowodnij, że $\sum_i f(A, B_i, C_i)$ nie zależy od punktu A – liczba $f(X, Y, Z)$ jest polem trójkąta XYZ, jeśli kąt (zorientowany) pomiędzy wektorami $\overrightarrow{XY}$ i $\overrightarrow{XZ}$ jest wypukły – w przeciwnym razie $f(X, Y, Z)$ jest minus polem trójkąta XYZ.

8. Udowodnij, że spośród czworokątów o zadanych długościach boków największe pole ma ten, na którym można opisać okrąg. Zakładamy, że taki ekstremalny czworokąt istnieje.

rozwiązania na str. 15

Literatura

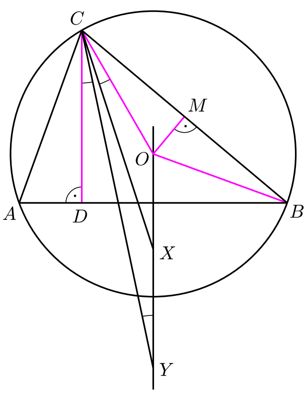
[1] H. Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*

[2] V. Prasolov, *Problems in plane and solid geometry*

[3] W. Ungier, M. Hamera, *Wybrane zadania z 43 lat Olimpiad Fizycznych*

[4] М.Б. Балк, В.Г. Болтянский: *Геометрия масс*

[*]Studenci Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego



Rozwiązanie zadania M 1159.

Oznaczmy przez D rzut prostokątny punktu C na prostą AB oraz niech M będzie środkiem boku BC. Wówczas $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2}\sphericalangle BOC = \sphericalangle COM$, skąd uzyskujemy $\sphericalangle ACD = \sphericalangle OCM$. Pozostaje więc wykazać, że $\sphericalangle OCX = \sphericalangle DCY$. Z danej w treści zadania równości mamy $\frac{OX}{OC} = \frac{OC}{OY}$, co w połączeniu z równością $\sphericalangle COX = \sphericalangle YOC$ dowodzi, że trójkąty COX i YOC są podobne. A zatem $\sphericalangle OCX = \sphericalangle OYC = \sphericalangle DCY$.

Rozwiązanie zadania M 1161.

Zależność $f(n) = k$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $k^2 - k < n \leqslant k^2 + k$. Stąd wynika, że dla $k = 1, 2, \ldots$ istnieje dokładnie $2k$ takich liczb całkowitych n, że $f(n) = k$.

Ponadto $f(10\,000) = 100$, a największą taką wartością n, dla której $f(n) = 99$, jest $99^2 + 99 = 9900$. Stąd otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{10\,000} \frac{1}{f(i)} = \sum_{i=1}^{99} 2i \cdot \frac{1}{i} + 100 \cdot \frac{1}{100} = 199\,.$$