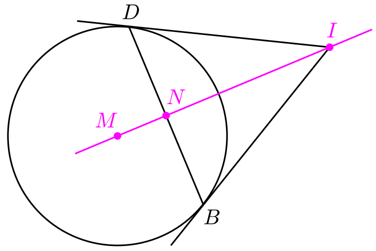
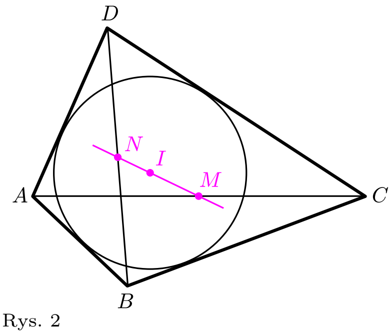
Twierdzenie Newtona

Waldemar POMPE[*]



Rys. 1



Rys. 2

Zaczniemy od porównania dwóch konfiguracji geometrycznych. Na rysunku 1 dany jest okrąg o środku M oraz punkt I leżący na zewnątrz okręgu. Z punktu I poprowadzono styczne do tego okręgu w punktach B i D. Punkt N jest środkiem odcinka BD.

Z kolei rysunek 2 przedstawia okrąg o środku I wpisany w czworokąt $ABCD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD.

Pomimo iż konfiguracje te różnią się, to w obu konkluzja jest taka sama: *punkty M, N, I leżą na jednej prostej*. I choć fakt ten jest w pierwszym przypadku oczywisty, w drugim może zdumiewać oraz przysporzyć sporo trudności tym, którzy chcieliby go samodzielnie dowieść. Ta druga, trudniejsza zależność nosi nazwę *twierdzenia Newtona*.

W pracy „wyprowadzimy" pewną niewielką modyfikację twierdzenia Newtona (dla czworokąta $ABCD$ mającego okrąg dopisany zamiast wpisanego), opierając się na prostej obserwacji z rysunku 1. Zmieniając wtedy jedynie słówko „dopisany" na „wpisany", uzyskamy twierdzenie Newtona. Zabieg ten może budzić wątpliwości, dlatego w dalszej części artykułu podamy ścisły, geometryczny dowód twierdzenia Newtona. Dowód ten będzie opierał się na całkiem innych spostrzeżeniach.

Niech A i C będą ustalonymi punktami, a liczba a ustaloną liczbą większą od odległości punktów A, C. Zbiór takich punktów X, dla których $AX + XC = a$, nazywa się *elipsą o ogniskach A i C*. Część prostej AC zawarta wewnątrz elipsy nosi nazwę *osi głównej elipsy*.

Przekształcenia afiniczne to te przekształcenia przestrzeni euklidesowej – tutaj płaszczyzny, które proste przeprowadzają na proste. Wynika z tego w szczególności, że proste równoległe przeprowadzają na równoległe, środek odcinka na środek odcinka, a nawet, że ograniczone do prostej są podobieństwami. We współrzędnych kartezjańskich wyrażają się wzorami

$$x' = ax + by + c, \quad y' = dx + ey + f,$$

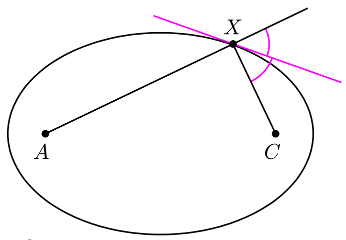
gdzie $ae - bd \neq 0$,

z czego wynika także, iż zachowują styczność krzywych i – o ile krzywe są algebraiczne – ich stopień.

Znanych jest wiele równoważnych definicji elipsy. Jedna z nich, którą wykorzystamy, jest następująca: *Zbiór jest elipsą wtedy i tylko wtedy, gdy jest obrazem okręgu przy pewnym przekształceniu afinicznym.*

Będziemy dalej korzystać z dwóch nietrudnych faktów. Pierwszy z nich to geometryczny opis stycznej do elipsy.

Fakt 1. Jeśli punkt X należy do elipsy o ogniskach A i C, to dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku X trójkąta AXC jest styczna do elipsy w punkcie X (rys. 3).

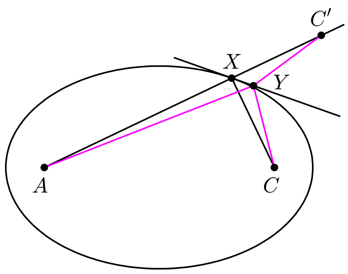


Rys. 3

Dowód. Przypuśćmy, że dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku X trójkąta AXC ma z elipsą jeszcze jeden punkt wspólny Y (rys. 4). Niech C' będzie obrazem symetrycznym punktu C względem tej dwusiecznej. Wtedy punkt C' leży na prostej AX. Ponadto $CX = C'X$ oraz $CY = C'Y$. Zatem

$$a = AX + XC = AX + XC' = AC' < AY + YC' = AY + YC = a\,.$$

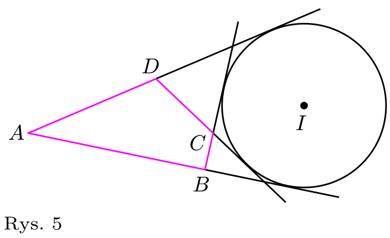
Uzyskaliśmy sprzeczność.



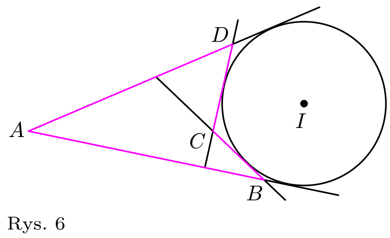
Rys. 4

Następny fakt, z którego będziemy korzystać, dotyczy możliwości dopisania okręgu do czworokąta.

Rozważmy na płaszczyźnie cztery proste w położeniu ogólnym. Proste te wyznaczają dwa rodzaje czworokątów: czworokąt wypukły $ABCD$ (rys. 5) oraz czworokąt wklęsły $ABCD$ (rys. 6). Ponadto proste te dzielą płaszczyznę na 11 obszarów, z których dwa są czworokątowe – jeden ograniczony, drugi nieograniczony. Jeśli istnieje okrąg zawarty w nieograniczonej czworokątowej części i styczny do wszystkich czterech prostych, to mówimy, że *do czworokąta $ABCD$ można dopisać okrąg* (rys. 5, 6).



Rys. 5



Rys. 6

[*]Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

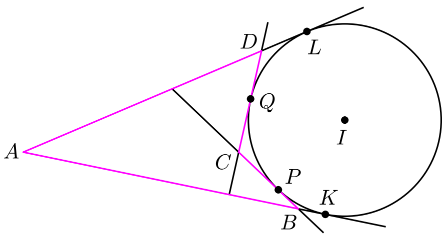
Dla ustalenia uwagi oznaczmy wierzchołki czworokąta (wypukłego lub wklęsłego) tak, jak pokazano na rysunkach 5, 6, tzn. przyjmijmy, że punkt C jest wspólnym wierzchołkiem dwóch czworokątowych obszarów.

Fakt 2. Do czworokąta $ABCD$ (niezależnie od tego, czy jest on wypukły, czy wklęsły) można dopisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy

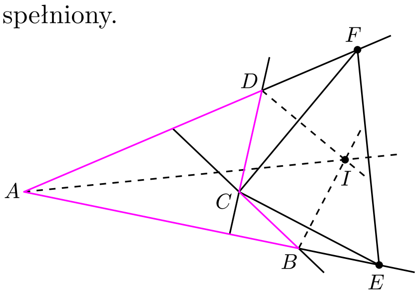
$$AB + BC = AD + DC. \tag{1}$$

Dowód. Ponieważ dowód w obu przypadkach jest podobny, przeprowadzimy go na przykładzie czworokąta wklęsłego (rys. 6).

Załóżmy najpierw, że istnieje okrąg dopisany do czworokąta $ABCD$ styczny do prostych AB, AD, CB, CD odpowiednio w punktach K, L, P, Q (rys. 7). Wówczas skoro $CP = CQ$, to dowodzona równość (1) sprowadza się do wykazania, że $AB + BP = AD + DQ$. Ale $BP = BK$ oraz $DQ = DL$, więc wystarczy wykazać, że $AB + BK = AD + DL$. Równość ta jest równoważna warunkowi $AK = AL$, który, oczywiście, jest spełniony.

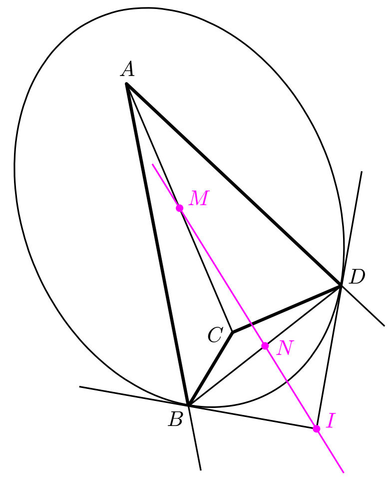


Rys. 7



Rys. 8

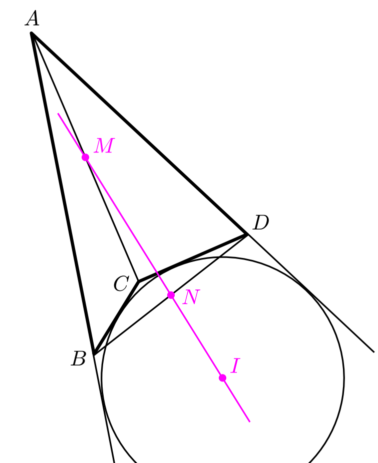
Udowodnimy teraz implikację odwrotną. Załóżmy, że w czworokącie wklęsłym $ABCD$ zachodzi równość (1). Na prostej AB wybierzmy taki punkt E, że $BC = BE$ oraz punkt B leży pomiędzy punktami A i E (rys. 8). Analogicznie na prostej AD znajdujemy taki punkt F, że $CD = DF$ oraz punkt D leży pomiędzy punktami A i F. Wówczas z równości (1) wynika, że $AE = AF$. Zatem dwusieczne kątów CBE, CDF oraz EAF są jednocześnie symetralnymi odcinków CE, CF oraz EF, czyli przecinają się w jednym punkcie I. Stąd wynika, że odległości punktu I od prostych AB, BC, CD i DA są równe, a więc istnieje okrąg o środku I styczny do wszystkich tych czterech prostych. Ponieważ punkt I znajduje się w nieograniczonej części czworokątowej, więc jest on środkiem okręgu dopisanego do czworokąta $ABCD$.



Rys. 9

Wyjaśnimy teraz, jak uzyskać wspomnianą wyżej modyfikację twierdzenia Newtona, korzystając z rysunku 1.

Przekształćmy afinicznie rysunek 1 (dla uproszczenia będziemy oznaczać punkt i jego obraz po przekształceniu afinicznym tą samą literą). Wówczas okrąg przejdzie na elipsę, a jego środek M przejdzie na środek elipsy (rys. 9). Proste IB oraz ID będą po tym przekształceniu styczne do elipsy, a punkt N pozostanie środkiem odcinka BD.



Rys. 10

Załóżmy dodatkowo, że przekształcenie afiniczne pozostawia punkty B i D po przeciwnych stronach osi głównej uzyskanej elipsy, której ogniska oznaczymy przez A i C.

Punkty B i D leżą na tej elipsie, a więc $AB + BC = AD + DC$. Stąd na mocy faktu 2 istnieje okrąg dopisany do czworokąta $ABCD$. Z kolei z faktu 1 wynika, że styczne IB i ID są dwusiecznymi kątów zewnętrznych przy wierzchołkach B i D w czworokącie $ABCD$. Wobec tego punkt I jest środkiem okręgu dopisanego do czworokąta wypukłego $ABCD$.

Przekształcenie afiniczne zachowuje współliniowość, więc punkty M, N oraz I leżą na jednej prostej. Uzyskaliśmy w ten sposób następującą modyfikację twierdzenia Newtona (rys. 10).

Twierdzenie. Jeśli punkt I jest środkiem okręgu dopisanego do czworokąta (wypukłego lub wklęsłego) $ABCD$ oraz punkty M i N są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD, to punkty I, M, N leżą na jednej prostej.

Podamy teraz dowód samego twierdzenia Newtona, który oparty jest na poniższym lemacie. Przez $[\mathcal{F}]$ będziemy oznaczać pole figury $\mathcal{F}$.

Lemat. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, niebędący równoległobokiem, oraz liczba dodatnia a. Wówczas wszystkie punkty X leżące wewnątrz czworokąta $ABCD$, dla których $[XAB]+[XCD]=a$, leżą na jednej prostej.

Dowód. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że proste AB i CD nie są równoległe i przecinają się w punkcie E (rys. 11). Niech ponadto K i L będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na półprostych $EA^{\rightarrow}$ i $ED^{\rightarrow}$, że $EK=AB$ oraz $EL=CD$. Wtedy

(2) $$a=[XAB]+[XCD]=[XEK]+[XEL]=[EKL]\pm[KLX],$$

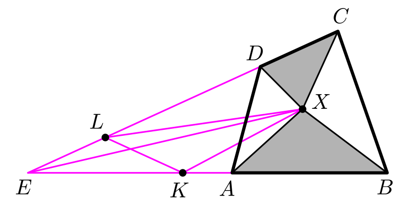
gdzie znak w ostatnim wyrażeniu zależy od tego, czy liczba a jest większa, czy mniejsza od pola trójkąta EKL (wtedy punkt X znajduje się odpowiednio na zewnątrz lub wewnątrz trójkąta EKL).

W obu przypadkach położenia punktów E, K i L nie zależą od wyboru punktu X. Zatem na mocy równości (2) pole trójkąta KLX również nie zależy od wyboru punktu X. Stąd wynika, że wszystkie punkty X leżą na pewnej prostej, równoległej do prostej KL.

Przystępujemy do dowodu twierdzenia Newtona. Niech $a=\frac{1}{2}[ABCD]$. Wykażemy, że jeśli X jest jednym z punktów I, M lub N, to

(3) $$[XAB]+[XCD]=a,$$

skąd bezpośrednio z powyższego lematu uzyskamy tezę twierdzenia Newtona.



Rys. 11

Oznaczmy przez r promień okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$. Wtedy z zależności $AB+CD=BC+DA$ otrzymujemy

$$[IAB]+[ICD]=\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot r=\frac{1}{4}(AB+CD+BC+DA)\cdot r=\frac{1}{2}[ABCD],$$

co dowodzi równości (3) dla $X=I$. Ponadto

$$[MAB]+[MCD]=\frac{1}{2}[ABC]+\frac{1}{2}[CDA]=\frac{1}{2}[ABCD],$$

skąd otrzymujemy zależność (3) dla $X=M$. Dowód tej równości dla $X=N$ jest analogiczny. W ten sposób udowodniliśmy twierdzenie Newtona.

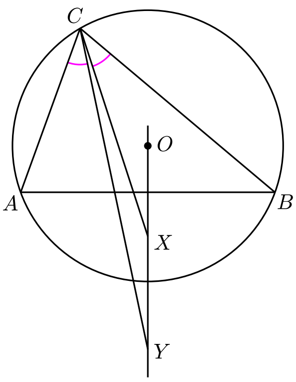
Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 685. Oszacować, jaką moc rozwija kolarz na finiszu w płaskim terenie.
Rozwiązanie na str. 16

F 686. Przy jakiej minimalnej prędkości rowerzysta może przelecieć przez głowę (razem z rowerem), po zaklinowaniu się przedniego koła w szczelinie chodnika?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Waldemar POMPE



1159. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu r (rys.). Punkty O, X, Y leżą w tej właśnie kolejności na symetralnej odcinka AB oraz wewnątrz kąta ACB, przy czym $OX\cdot OY=r^2$. Wykazać, że $\sphericalangle ACY=\sphericalangle XCB$.
Rozwiązanie na str. 6

1160. Ciąg $a_1,a_2,\ldots$ liczb rzeczywistych jest określony przez warunek

$$a_1=1,\ a_2=4\quad\text{oraz}\quad a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2-1}{a_n}\quad\text{dla } n=1,2,\ldots.$$

Dowieść, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.
Rozwiązanie na str. 16

1161. Oznaczmy przez $f(n)$ tę liczbę całkowitą, która na osi liczbowej znajduje się najbliżej liczby $\sqrt{n}$. Obliczyć

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\ldots+\frac{1}{f(10\,000)}.$$

Rozwiązanie na str. 6