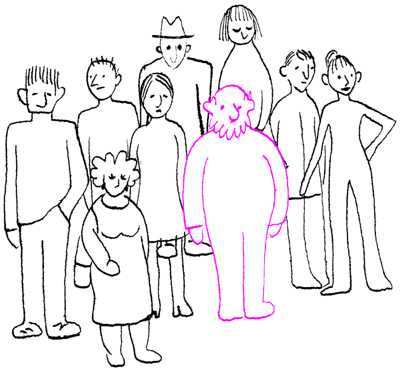
Sprawiedliwa rekrutacja

Agnieszka KASZKOWIAK[*]



Na to, żeby Jasio, absolwent gimnazjum, znalazł się w szkole ponadgimnazjalnej, potrzeba, żeby przeszedł pomyślnie proces naboru do szkół średnich. Następnie, gdy Janek zda maturę i będzie chciał studiować, będzie musiał uczestniczyć w rekrutacji do szkół wyższych. Gdy dorosły już Jan będzie ubiegał się o stanowisko w konkretnej firmie i złoży podanie o pracę, to znów wejdzie w proces rekrutacji. Rekrutacja to sytuacja, gdzie jednostka (szkoła, uczelnia, firma) spośród kandydatów ubiegających się o przyjęcie wybiera tych, którzy spełniają jej wymagania w najwyższym stopniu. Zastanówmy się, kiedy taki system możemy nazwać sprawiedliwym.

Nie tracąc ogólności, zajmijmy się na razie naborem kandydatów do szkół. Kandydaci chcą się dostać do jak najlepszych szkół, a szkoły chcą mieć jak najlepszych kandydatów, zgodnie ze swoim systemem preferencji (np. biorąc pod uwagę liczbę punktów z testów z konkretnych przedmiotów). W sprawiedliwym systemie rekrutacji „dobrzy” kandydaci mają większe szanse na dostanie się do szkoły niż kandydaci „gorsi” z punktu widzenia konkretnej szkoły.

Dowód na to, że taki sprawiedliwy system rekrutacji istnieje, podali w 1962 roku D. Gale i L. Shapley. Znaleźli oni algorytm pozwalający uwzględnić preferencje szkół i kandydatów prowadzący do uzyskania przydziału, który jest sprawiedliwy i do tego najlepszy z możliwych. Aby ułatwić dobre zrozumienie idei algorytmu, przedstawię na początku założenia, zaproponowane przez L.E. Dubinsa i D.A. Freedmana. Załóżmy na początku, że liczba szkół i kandydatów jest równa i wynosi n, zbiór kandydatów to

$$K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\},$$

a zbiór szkół to

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}.$$

Każda szkoła może przyjąć tylko jednego kandydata i każdy kandydat może się dostać tylko do jednej szkoły. Kandydaci potrafią określić, która z dowolnych dwóch szkół im bardziej odpowiada (mówimy tu o ostrym liniowym porządku preferencji kandydata). Ponadto szkoły, tworząc swoje listy rankingowe na podstawie np. testów, wyników matur, ocen z wybranych przedmiotów na świadectwie maturalnym, potrafią powiedzieć, który spośród dowolnych dwóch kandydatów w wyższym stopniu spełnia ich oczekiwania. Przydział kandydatów do szkół $f: K \to S$ nazwiemy *stabilnym* (*sprawiedliwym*), jeżeli nie istnieje takich dwóch kandydatów $k_1, k_2 \in K$ oraz dwie szkoły $s_1, s_2 \in S$, że:

- kandydat k_1 znalazł się w szkole s_1, tzn. $f(k_1) = s_1$,
- kandydat k_2 znalazł się w szkole s_2, tzn. $f(k_2) = s_2$,
- kandydat k_1 woli szkołę s_2 od s_1,
- szkoła s_2 woli kandydata k_1 od k_2.

Algorytm przebiega następująco. Zakładamy, że wszystkie szkoły (albo przedstawiciele każdej szkoły) zgromadzeni są w jednym pomieszczeniu. Na początku wszyscy kandydaci są na zewnątrz tego pomieszczenia.

[*]studentka, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

Dowolny kandydat (powiedzmy k_i) wchodzi do „pomieszczenia rekrutacyjnego” i składa podanie do szkoły s_i, w której najbardziej chciałby się znaleźć. Następnie wchodzi inny kandydat k_j i też składa podanie do szkoły, według niego najlepszej. Jeśli tą szkołą jest również s_i, to szkoła s_i określa, którego kandydata woli bardziej: k_i czy k_j i wybranego zatrzymuje, a drugiego odsyła na zewnątrz „pomieszczenia rekrutacyjnego”. Kandydat, z którego jakaś szkoła zrezygnowała, skreśla ją ze swojej listy preferencji. Następnie wchodzą kolejni kandydaci i postępowanie wygląda podobnie, aż do momentu, gdy wszyscy kandydaci zostaną już przydzieleni.

Przykładowo, rozpatrzmy trzech kandydatów A, B, C i trzy szkoły X, Y, Z. Kandydat A najbardziej chciałby się dostać do szkoły X, na drugim miejscu do Y, a na trzecim do szkoły Z. Zapiszmy to umownie: A – (X,Y,Z). Analogicznie preferencje pozostałych kandydatów i szkół wyglądają następująco:

- kandydat B – (Y,X,Z),
- kandydat C – (Y,Z,X),
- szkoła X – (B,A,C),
- szkoła Y – (A,C,B),
- szkoła Z – (C,B,A).

Algorytm rozpoczniemy od sytuacji, w której w pomieszczeniu rekrutacyjnym mamy wszystkie szkoły X, Y, Z. Do pomieszczenia wchodzi kandydat A. Zgodnie ze swoimi preferencjami najbardziej zależy mu na szkole X, a więc do niej składa podanie. Następnie wchodzi kandydat B, którego „ulubioną” szkołą jest Y, więc tam się zatrzymuje. Potem do pomieszczenia wchodzi kandydat C, który na pierwszym miejscu chciałby się dostać również do szkoły Y. Zatem szkoła Y musi zdecydować – czy zostawić kandydata B, czy odesłać go na zewnątrz pomieszczenia rekrutacyjnego i przyjąć kandydata C. Zgodnie ze swoją listą preferencji szkoła Y wybierze drugą możliwość, gdyż woli kandydata C. „Odesłany” kandydat B będzie się ubiegał o przyjęcie do szkoły X, która znajduje się na drugim miejscu jego listy preferencji. Ale w szkole X jest już kandydat A. Dla szkoły X „lepszym" kandydatem jest B, zatem tym razem kandydat A musi opuścić pomieszczenie. Kandydat A zaraz po szkole X chciałby być w szkole Y, więc tam się zgłasza (jest już tam kandydat C). Szkoła Y decyduje się zatrzymać kandydata A, a kandydata C odsyła. Kandydat C zgłasza się do szkoły Z, do której nie ubiegał się wcześniej nikt inny, więc już tam zostaje i mamy koniec algorytmu.

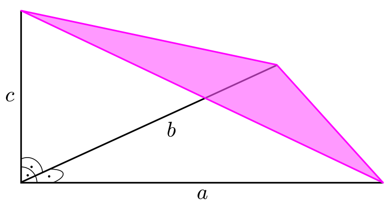
Bez względu na kolejność wchodzących kandydatów otrzymany przydział kandydatów do szkół będzie następujący: X – B, Y – A, Z – C. Algorytm Gale'a–Shapleya kończy się w skończonej liczbie kroków, nieprzekraczającej n^2 (po kolei każdy z n kandydatów ubiega się o dostanie się do każdej z n szkół). Po zakończeniu algorytmu kandydaci i szkoły są przydzieleni wzajemnie jednoznacznie. W każdym kroku jest taka sama liczba kandydatów na zewnątrz pomieszczenia rekrutacyjnego jak szkół, które nie przyjęły żadnych kandydatów. Pozostali kandydaci są przyporządkowani wzajemnie jednoznacznie. Gdy tylko szkoła dostanie pierwsze zgłoszenie, ma już potencjalnego kandydata. Algorytm kończy się w momencie, gdy każda szkoła otrzymała przynajmniej jedno zgłoszenie. Otrzymany przydział jest stabilny (sprawiedliwy). Zauważmy, że niemożliwe jest, by przydzielono k_1 do s_1 i k_2 do s_2, gdzie k_1 woli s_2 od s_1, a s_2 woli k_1 od k_2. W przeciwnym przypadku k_1 aplikowałby do s_2 i musiałby zostać przez tę szkołę odrzucony, gdyż ostatecznie przyjęła ona kandydata k_2 – wbrew swoim preferencjom.

Założenia uproszczonego algorytmu można rozszerzyć tak, ażeby funkcjonował także w sytuacjach, które zdarzają się w rzeczywistości podczas procesów rekrutacyjnych. Liczba kandydatów i szkół może nie być równa. Załóżmy przykładowo, że jest więcej kandydatów niż szkół. Należy tu wspomnieć o nowym rodzaju niestabilności – k_1 został przyjęty przez s_1, a kandydat k_2 nie znalazł się w żadnej szkole, choć s_1 woli k_2 od k_1. Rozwiązaniem jest tu wprowadzenie *dodatkowych* (*fikcyjnych*) szkół, które są dla kandydatów gorsze niż pozostałe szkoły. Do szkół fikcyjnych będą trafiali kandydaci nieprzyjęci przez żadną rzeczywistą szkołę. Podobne rozwiązanie wprowadza się, gdy razem miejsc w szkołach jest więcej niż kandydatów, wtedy wprowadzamy dodatkowych (fikcyjnych) kandydatów. Gdy liczba szkół i kandydatów jest taka sama, to możemy już zastosować algorytm Gale'a–Shapleya.

Szkoły mogą mieć limity. W rzeczywistości szkoły przyjmują więcej kandydatów niż jednego i wtedy mówimy, że szkoła s ma *limit* $q(s) \geqslant 1$ i nie może przyjąć więcej niż $q(s)$ kandydatów. Tutaj rozwiązaniem będzie „klonowanie" szkół: ustalenie $q(s)$ *kopii szkoły* s, gdzie każda kopia będzie miała limit 1. Zakłada się przy tym także, że preferencje względem każdej szkoły zostaną skopiowane. Czyli kandydatowi k będzie wszystko jedno, w której z kopii szkoły s się znajdzie. Podobnie każda z kopii szkoły s będzie miała takie same preferencje, jeśli chodzi o kandydatów. Zatem znowu mamy równą liczbę szkół i kandydatów i możemy zastosować algorytm Gale'a–Shapleya.

Limity szkół mogą być *miękkie*. Oznacza to, że w przypadku, gdy istnieją kandydaci, którzy są tak samo preferowani przez daną szkołę (np. mają taką samą liczbę punktów), to dopuszcza się możliwość przyjęcia więcej niż $q(s)$ kandydatów. Szkoła s przyjmuje więc taką liczbę kandydatów, która w możliwie najmniejszym stopniu przekracza limit $q(s)$. Jednakże spełniony musi być warunek, że jeśli jakiś kandydat zostaje przyjęty, to również zostaje przyjęty każdy inny kandydat z tą samą (lub większą) liczbą punktów. Również w tym przypadku można udowodnić, że algorytm Gale'a–Shapleya prowadzi do stabilnego rozwiązania, choć dowód tego faktu jest bardziej skomplikowany.

W świecie, gdzie z rekrutacją spotykamy się na każdym kroku, potrzeba dobrych systemów, które przeprowadzą ją w jak najlepszy sposób. Algorytm Gale'a–Shapleya jest matematycznym pomysłem na taką sprawiedliwą rekrutację na przykładzie przydziału kandydatów do szkół. Inne systemy rekrutacyjne (np. pracowników do pracy) też mogą się opierać na tym algorytmie. Czytelnikom polecam odwiedzenie w Internecie strony `http://www.people.hbs.edu/gbarron/EP-Match_for_Excel.html`, gdzie znajduje się program, implementujący opisany algorytm. Można się osobiście przekonać, że faktycznie działa w praktyce.



zacieniowane pole to $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$

Na twierdzenie Pitagorasa można spojrzeć tak: *jeśli obetniemy* (byle jak) *róg kwadratu, to suma kwadratów miar boków przyległych do kąta prostego jest równa kwadratowi miary pozostałego boku.* Przejdźmy do wyższego wymiaru. Okazuje się (proszę sprawdzić – zawodowcom polecamy iloczyn wektorowy), że *jeśli obetniemy róg sześcianu, to suma kwadratów miar ścian przyległych do kąta prostego jest równa kwadratowi miary pozostałej ściany.* Co więcej, okazuje się, że w dowolnym (skończonym) wymiarze n prawdą jest, że *jeśli obetniemy róg* n*-wymiarowej kostki, to suma kwadratów miar ścian (czyli* $(n-1)$*-wymiarowych sympleksów) przyległych do kąta prostego jest równa kwadratowi miary pozostałej ściany (też* $(n-1)$*-wymiarowego sympleksu).*

M. K.